<u>פיתרון לתרגיל 8</u>

<u>תשובה 1:</u>

א. הקשר בין המקדמים a ו b לבין השורשים x_1 ו x_2 נתון על ידי זוג הנוסחאות

$$x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad \text{ו—} \quad x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

אשר מביאות

$$\begin{cases} a = -(x_1 + x_2), \\ b = x_1 x_2. \end{cases}$$

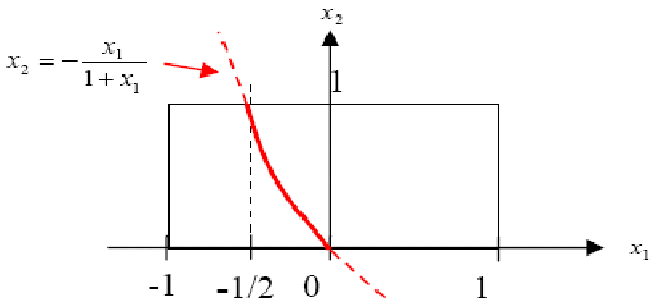
ההסתברות הדרושה, $P(a>b)$, היא

$$P(a>b) = P\big(-(x_1+x_2) > x_1x_2\big) = P\left(x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right).$$

בשויון האחרון, השתמשנו בעובדה ש— $1+x_1$ אינו שלילי. על פי גישה קלאסית להסתברות,

$$P\left(x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right) = \frac{\left|\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right|}{|\Omega|}.$$

מהציור עולה, כי גודל מרחב המדגם הוא $|\Omega| = 2$. גודל המאורע $\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}$ הוא



$$\left|\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right| = \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-\frac{x_1}{1+x_1}\right)dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{x_1+1-1}{1+x_1}dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(1-\frac{1}{1+x_1}\right)dx_1$$

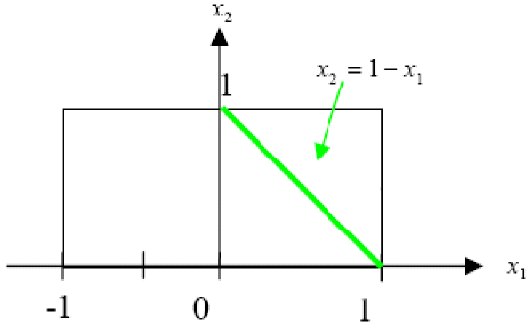
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{1+x_1}dx_1 = \ln(1+x_1)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \ln 2.$$

זה מביא

$$.P(a<b) = \frac{\left|\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}\ln 2$$

ב. ההסתברות הדרושה היא הסתברות מותנית

$$P(b>0 \;/\; a>-1) = P(x_1x_2>0 \;/\; -(x_1+x_2)>-1) = P(x_1>0 \;/\; x_2<1-x_1)$$
$$= \frac{P(x_1>0 \cap x_2<1-x_1)}{P(x_2<1-x_1)}$$



מהתרשים רואים ש

$$.P(x_1 > 0 \,\cap x_2 < 1 - x_1) = \frac{\left|\{x_1 > 0\} \cap \{x_2 < 1 - x_1\}\right|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

וגם

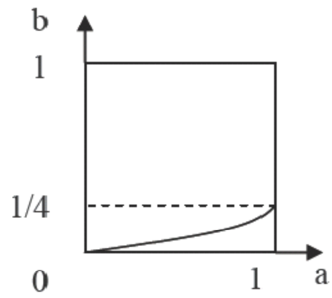
$$P(x_2 < 1 - x_1) = \frac{\left|\{x_2 < 1 - x_1\}\right|}{|\Omega|} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

כך ש

$$.P(b > 0 \;/\; a > -1) = \frac{P(x_1 > 0 \,\cap x_2 < 1 - x_1)}{P(x_2 < 1 - x_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

א. שורשי המשוואה הם :

את התשובה יש לחלק לשנים. ראשית נחשב את ההסתברות ששורשי המשוואה ממשיים, דהיינו כאשר מתקיים $a^2 - 4b \geq 0$ דהיינו ההסתברות הדרושה היא $P(b < \frac{a^2}{4})$ שמתאימה בידיוק לשטח שמתחת לעקום $b = \frac{a^2}{4}$



אזי $P(b < a^2/4) = \int_0^1 \frac{a^2}{4} da = \frac{1}{12}$.

בשלב השני נמצא את הסתברות ש - $|X_1 - X_2| = \sqrt{a^2 - 4b} < \frac{1}{2}$ כאשר נתון ש $a^2 - 4b \geq 0$

$$P\left(\sqrt{a^2 - 4b} < \frac{1}{2} / a^2 > 4b\right) = P\left(a^2 - 4b < \frac{1}{4} / a^2 > 4b\right)$$

$$= \frac{P\left(\left\{a^2 - 4b < \frac{1}{4}\right\} \cap \left\{a^2 > 4b\right\}\right)}{P\left(a^2 > 4b\right)} = \frac{P\left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{16} < b < \frac{a^2}{4}\right)}{P\left(b < \frac{a^2}{4}\right)}$$

נשים לב ש $P(A < b < B) = P(b < B) - P(b < A)$ לכן

$$\frac{\int_0^1 \frac{a^2}{4} da - \int_{1/2}^1 \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{16}\right) da}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2} \quad .$$

תשובה 2:

$X \sim \exp(0.1)$

.1

$$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - \int_0^{10} 0.1 e^{-0.1x} dx = 1 - \left[(0.1) \cdot \frac{e^{-0.1x}}{-0.1} \right]_0^{10} =$$
$$= 1 + \left[e^{-0.1x} \right]_0^{10} = 1 + e^{-1} - 1 = \frac{1}{e}$$

.2

$$P(10 < x < 20) = \int_{10}^{20} 0.1 e^{-0.1x} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$$

תשובה 3:

על מנת של Y תהיה התפלגות אחידה, ההסתברות של כל אחד מערכיו להיות שליש, כלומר:

$$\frac{1}{3} = p(Y=0) = p(X \le a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$
$$\frac{1}{3} = p(Y=1) = p(a \le X \le b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$
$$\frac{1}{3} = p(Y=2) = p(X \ge b) = \int_b^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda b}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל כי $a = \frac{\ln 1.5}{\lambda}$ וממשוואה אחרונה $b = \frac{\ln 3}{\lambda}$.

תשובה 4:

.1 $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le \sqrt[3]{y}) = \int_0^{\sqrt[3]{y}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \cdot \sqrt[3]{y}}$

$$f_Y(y) = \left(F_Y(y)\right)' = \frac{\lambda}{3} \sqrt[3]{y^2} e^{-\lambda \cdot \sqrt{y}}$$

תשובה 5:

א. צריך לבדוק ש $\iint f_{x,y}(x,y)dxdy = 1$

אכן $\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x,y)dxdy} = \int_0^1 \int_0^2 \frac{6}{7}\left(\mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{xy}}{2}\right) \mathrm{dydx} = \int_0^1 \frac{6}{7}\left[\mathrm{x}^2\mathrm{y} + \frac{\mathrm{xy}^2}{4}\right]_0^2 \mathrm{dx} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$

ב.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6}{7}\left(\mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{xy}}{2}\right) dy = \frac{6}{7}\left[\mathrm{x}^2\mathrm{y} + \frac{\mathrm{xy}^2}{4}\right]_0^2 = \frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x$$

תשובה 6:

ראשית פונקצית ההצטברות והצפיפות הן:

$$F_X(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

א.

$$Y = \sqrt{|X|}$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\sqrt{|X|} \le y\right) = P\left(X \le y^2\right) = F_X(y) = \frac{y^2+1}{2}$$

$$f_Y(y) = \frac{2y}{2} = y$$

ב.

$$Y = -\ln(|X|)$$

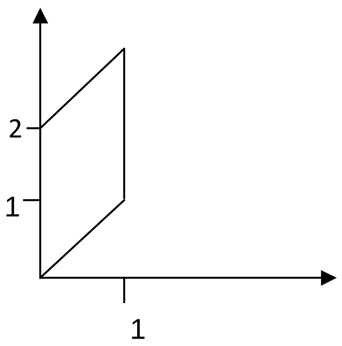
$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-\ln(|X|) \le y) = P(\ln(|X|) \ge y) = P(|X| \ge e^y)$$

$$= P(X \ge e^y) + P(X \le -e^y) = 1 - F_X(e^y) + F_X(-e^y) = 1 - \left(\frac{e^y+1}{2}\right) + \left(\frac{-e^y+1}{2}\right) = 1 - e^y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \le 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

תשובה 7:

ראשית נצייר את התחום הרלוונטי :



נתון $X \sim U(0,1)$ לכן $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & other\ wise \end{cases}$ ו- $Y|X = x \sim U(x, x+1)$ לכן

$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} 1 & x \le y \le x+1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

א. לכל $0 \le x \le 1$ ו- $x \le y \le x+1$ הצפיפות המשותפת היא $f_{X,Y}(x,y) =$ $f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x) = 1 \cdot 1 = 1$ אחרת, לפחות אחת מהפונקציות $f_X(x)$ ו- $f_{Y|X=x}(y)$ מתאפסת ולכן $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)$ מתאפסת.

ב. עבור $0 \le y \le 2$: ראשית נשים לב ש $x \le y \le x+1$ לכן $y - 1 \le x \le y$ וגם $0 \le x \le 1$ לכן נחלק ל-2 מקרים כש - $0 \le y \le 1$ מתקיים $0 \le x \le y$ וכש- $1 < y \le 2$ מתקיים $y - 1 \le x \le 1$.

לכן עבור התחום הראשון: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 1dx = y$

ובתחום השני: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{y-1}^{1} 1dx = 2 - y$

דהיינו $f_Y(y) = \begin{cases} y & 0 \le y \le 1 \\ 2-y & 1 < y \le 2 \end{cases}$.

עבור כל ערך אחר של y פונקציית הצפיפות המשותפת שווה לאפס ולכן $f_Y(y) = 0$.

ג. בבירור $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$ למשל קחו $x = 0, y = 1$ אגף ימין הוא 0 ושמאל $1 \cdot 1 = 1$. לכן המשתנים תלויים.

ד. פונקציית הצפיפות בתחום $0 \le y \le 2$ היא

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{1}{f_Y(y)}$$

ובכל מקום אחר היא 0 .

לכן $X|Y=y\sim\begin{cases}U(0,y) & 0\le y\le 1\\ U(y,2) & 1<y\le 2\end{cases}$

ה. מאחר ש $Y|X=x\sim U(x,x+1)$ נקבל ש $E(Y|X)=\frac{X+(X+1)}{2}=X+\frac{1}{2}$.

ו. $E(Y)=E_X\left(E_{Y|X}(Y|X)\right)=E\left(X+\frac{1}{2}\right)=E(X)+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$