פתרון תרגיל 11

1.6) נניח בשלילה ש $u \neq \alpha v$ אזי הם בת"ל וניתן להרחיבם לבסיס ל V. כעת נגדיר פונקציונל באופן הבא:

לכל w וקטור בסיס שונה מ v $\varphi(w)=0$ ועבור v $\varphi(v)=1$

הפונקציונל הנ"ל לנארי וסותר את הנתון.

1.10) א) הרכבת העתקות לינאריות היא העתקה לינארית.

ב)

$$T^*(\alpha\phi_1+\phi_2)=\varphi(T(a\phi_1+\phi_2))=\varphi(aT(\phi_1)+T(\phi_2))=$$
$$a\varphi(T(\phi_1))+\varphi(T(\phi_2))=aT^*(\phi_1)+T^*(\phi_2)$$

2.1) $$[T_\alpha]^*=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\overline{\alpha} & 0\\ 0 & \overline{\alpha}\end{pmatrix}=[T_{\overline{\alpha}}]$$

2.4) א) נסמן $T=A+iB$ באשר B,A צל"ע. אזי

$T^*=(A+iB)^*=A^*+(iB)^*=A^*-iB^*=A-iB$. נחבר ונחסר את שני השויונות ונקבל

$T+T^*=2A\rightarrow A=\frac{T+T^*}{2}$ ו- $T-T^*=2iB\rightarrow B=\frac{T-T^*}{2i}$

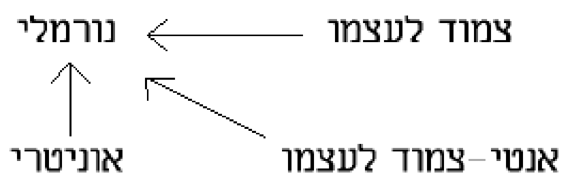
ב) נניח T נורמלי כלומר $TT^*=T^*T$. צ"ל כי $AB=BA$.

$$AB=\frac{T+T^*}{2}\frac{T-T^*}{2i}=\frac{(iT+iT^*)(T-T^*)}{2i}$$
$$=\frac{iT^2-iTT^*+iT^*T-i(T^*)^2}{2i}=\frac{iT^2-iT^*T+iTT^*-i(T^*)^2}{2i}$$
$$=\frac{(T-T^*)(iT+iT^*)}{2i}=BA$$

2.5) באופן דומה לתרגיל הקודם, נסמן $T=X+Y$ באשר X אופרטור צל"ע ו-Y אנטי-צל"ע. אזי:

$T^*=X^*+Y^*=X-Y$. נחבר ונחסר את שני השויונות ונקבל $X=\frac{T+T^*}{2}, Y=\frac{T-T^*}{2}$.

2.8) א+ב)



הגרירות ברורות, למשל אנטי-צל"ע לנורמלי: מתקיים $T^* = -T$ וצ"ל כי $TT^* = T^*T$. אכן,
$TT^* = T(-T) = -TT = T^*T$ כדרוש. באופן דומה לצל"ע, אוניטרי.

נמצא למשל מטריצה נורמלית שאיננה אוניטרית, צל"ע או אנטי צל"ע. נבחר $M = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$.

מטריצות אלכסוניות מתחלפות לכן M נורמלית. אך M לא שווה ל- M^* (לכן לא צל"ע), ולא ל- $-M^*$ (לכן לא אנטי צל"ע), וכמו כן M^* לא שווה ל- M^{-1} (לכן לא אוניטרית).

ג) לפי הגרירות שראינו בסעיף א', ברור כי צל"ע חיתוך נורמלי = צל"ע, אנטי-צל"ע חיתוך נורמלי = אנטי צל"ע, אוניטרי חיתוך נורמלי = אוניטרי.

צמוד לעצמו וגם אנטי-צמוד לעצמו: $T = T^*, -T = T^* \to T = -T \to 2T = 0$ לכן (מעל שדה שהמאפיין שלו לא 2) נקבל רק $T = 0$.

צל"ע וגם אוניטרי: $T^* = T, T^* = T^{-1} \to T = T^{-1} \to T^2 = I$

אנטי צל"ע וגם אוניטרי: $T^* = -T, T^* = T^{-1} \to T^{-1} = -T \to T^2 = -I$

3.23. א. $\Leftarrow$: מהתירגול

$\Rightarrow$:T נורמלית אז T לכסינה ונתון שהע"ע ממשיים. מההרצאה זה אומר שהנורמליות גוררת צל"ע.

ב. $\Leftarrow$:T אוניטרית אזי

$$\lambda^2 <v,v> = <\lambda v, \lambda v> = <Tv, Tv> = <T^*Tv, v> = <v,v>$$

$$\Downarrow$$

$$|\lambda| = 1$$

$\Rightarrow$:T נורמלית אזי T לכסינה אזי

$$T \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$T^* \approx \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$
$$TT^* \approx I$$
$$\Downarrow$$
$$TT^* = I$$

3.24ג:

טענה: $T = -i(F-I)(F+I)^{-1}$

הוכחה:

מב':

$$F = (I + i(-i(F-I)(F+I)^{-1})(I - i(-i(F-I)(F+I)^{-1})^{-1}$$
$$F = (I + (F-I)(F+I)^{-1})(I - (F-I)(F+I)^{-1})^{-1}$$
$$(I - (F-I)(F+I)^{-1})F = (I + (F-I)(F+I)^{-1})$$
$$FI - I = F - I \qquad true$$

3.27:

T נורמלי אזי $TT^* = T^*T$ אזי T לכסינה אורתוגונלית מעל C : $T \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

נזכיר ש $\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ (שורשי היחידה מסדר ..)

לכן:

$$D = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

3.30:

א. כיוון שני

$\Rightarrow$:

$$\|Tv\|^2 = \langle T^*Tv, v\rangle = \sum \alpha_i{}^2 \lambda_i^2 \langle v_i, v_i\rangle \le \sum \alpha_i{}^2 \langle v_i, v_i\rangle = \langle v, v\rangle = \| v \|^2$$

ב. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>מבחן 2006- מועד ב:</u>

א.

$$\subseteq: Av = 0 \Rightarrow A^2 v = AAv = A \cdot 0 = 0$$
$$\supseteq: \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = \langle A^2 v, v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$$

ב. $AadjA = |A|I$
$adjA = |A|A^{-1}$
A א"ג אזי ההופכי שלו א"ג ולכן ה ajd א"ג

<u>שאלה שהופיעה כבונוס באותו מבחן:</u>

לא. למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$