אינפי 2 – פיתרון תרגיל 4

1. עבור א' ו-ב' – נסתכל על הפונקציה הבאה : $f(x)=\begin{cases}0\,, x\in[0,1]\\ 1,\ x\in(1,2]\end{cases}$

ועל - $\mathrm{F}(x)=7$ ועל : $G(x)=x$, אז F קדומה ל f בקטע $[0,1]$ ו – $G(x)$ קדומה ל- f בקטע $(1,2]$ אך ל – f אין קדומה מכיוון שיש לה נקודת אי רציפות מסוג ראשון בקטע $[0,2]$ (או לא קיימת לה תכונת ערך הביניים בקטע המדובר) , ונוכל להגדיר את הפונקציה $H(x)$ כמו שמנוסח בסעיף ב' והיא לא תהיה קדומה כנדרש מאותה סיבה של אי רציפות מסוג ראשון .

ג. נשים לב כי קיים :

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{sinx}{x}} = \infty$ ולכן , קיימת $c>0$ כך שלכל $0<x<c$

קיים $f(x)>1$ (מהגדרת הגבול ...) . לכן בקטע $[0,c]$ קיים :

$$f(0)=0\,, f(c)>1\,, f(x)>1\ for\ all\ 0<x<c$$

לכן , לא מתקיימת תכונת ערך הביניים עבור הפונקציה שלנו בקטע $[0,c]$ - מה שהיה אמור להתקיים אם הפונקציה שלנו הייתה נגזרת של פונקציה אחרת ! .

2. ראשית נרשום : $\max(x,x^2)=\begin{cases}x^2 & ,x<0 \text{ או } x>1\\ x\ , & 0\le\ x\le1\end{cases}$, ואם נסתכל על הפונקציה

$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+c_1\,,x<0\\ \frac{x^3}{3}+c_2,x>1\\ \frac{x^2}{2}+c_3\ ,0\le\ x\le1\end{cases}$, אז היא מהווה קדומה לפונקציה המקורית שלנו

עבור $x\neq1, x\neq0$! . כעת נבדוק תנאי על הקבועים כך ש – f תהיה קדומה לפונקציה המקורית על כל הישר . אם נדרוש רציפות נקבל כי :

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)\Longrightarrow \frac{1}{3}+c_2=\frac{1}{2}+c_3$, ובנוסף :

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)\Longrightarrow c_1=c_3$, ופתרון שתי משוואות אלו יניב :

ונוכל להגדיר $c_3 = c_1$ and $c_2 = c_1 + \frac{1}{6}$

$$, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + c, x < 0 \\ \frac{x^3}{3} + c + \frac{1}{6}, x > 1 \\ \frac{x^2}{2} + c \ , 0 \leq \ x \leq 1 \end{cases}$$

וקיבלנו פונקציה <u>רציפה</u> , שמקיימת $\lim_{x\to 0^+} f^{(1)}(x) = \lim_{x\to 0^-} f^{(1)}(x)$ וגם $\lim_{x\to 1^+} f^{(1)} = \lim_{x\to 1^-} f^{(1)}(x)$, לכן לפי משפט שהזכרנו בתירגול - היא גזירה גם בנקודות התפר האלו ולכן גזירה על כל הישר ונגזרתה היא הפונקציה ממנה התחלנו .

.3

$$\mathrm{I}_m = \int x^{\alpha} ln^{\mathrm{m}} x dx \ =_{\text{חלקים}} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} ln^m(x) - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} m \cdot ln^{m-1}(x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} ln^m(x) - \int \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1} m \cdot ln^{m-1}(x) dx = \mathbf{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} ln^m(x) - \frac{m}{\alpha+1} \cdot I_{m-1} + C}$$

.4 א. נבצע חילוק פולינומים מכיוון שדרגת המונה גדולה מזו של המכנה ואחרי החלוקה נקבל : $x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = (x+3)\cdot(x^2+2) + 3x + 1$ ומכאן נקבל :

$$\int \frac{(x+3)\cdot(x^2+2)+3x+1}{x^2+2} = \int (x+3)dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{3x+1}{x^2+2} dx$$

נותר לחשב את האינטגרל :

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x)+1}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2} dx =$$

$$\frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}^2} dx = \boldsymbol{\frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

<u>ולכן התשובה הסופית היא</u> : $\boldsymbol{\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C}$

ב. $\int (\frac{\boldsymbol{1-x}}{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{dx} = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2}dx = \int \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right] = -\frac{1}{x} - 2ln|x| + x + C$

ג. $\int \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x + e^{\frac{x}{2}}}}\boldsymbol{dx} = \int \frac{\boldsymbol{e^{\frac{x}{2}}}}{\boldsymbol{e^{\frac{x}{2}}+1}}dx =_{u=e^{\frac{x}{2}}} = \int \frac{2du}{u+1} = 2ln\left|e^{\frac{x}{2}} + 1\right| + C$

ד.

$$\int \sqrt{\frac{\boldsymbol{e^x - 1}}{\boldsymbol{e^x + 1}}}\,\mathbf{dx} =_{\substack{t^2 = \frac{e^x-1}{e^x+1} \\ dx = \frac{4tdt}{(1+t^2)(1-t^2)}}} = \cdots = 2[\int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}] = \cdots = l\,n\left(\frac{1+\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}}{1-\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}}\right) -$$

$$2arctan\sqrt{\frac{\boldsymbol{e^x - 1}}{\boldsymbol{e^x + 1}}} + \mathbf{C}$$

ה. $\int \sqrt{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{ln}(\mathbf{1} + \sqrt{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{dx} =_{\substack{t=\sqrt{x} \\ dx = 2tdt}} = \cdots = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{x}^{\frac{3}{2}}\mathbf{ln}|\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{x}}| - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}[\sqrt{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{x}^{\frac{3}{2}}}{\mathbf{3}} - \mathbf{ln}|\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{x}}| + \mathbf{C}$

ו. $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\mathbf{2x-3}}} =_{\boldsymbol{t}=\sqrt{\boldsymbol{2x-3}}} = \cdots = \sqrt{\mathbf{2x - 3}} + \mathbf{C}$

ז. כאן יש "טריקון " : $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{1+e^x}} = \int \frac{\boldsymbol{e^{-x}dx}}{\boldsymbol{1+e^{-x}}} = -\boldsymbol{ln}(\mathbf{1} + \boldsymbol{e^{-x}}) + \boldsymbol{C}$

5. בהנחה ש $\boldsymbol{\varphi}$ גזירה ברציפות ואם $\boldsymbol{\varphi(t_0)} \neq$ אז יש סביבה של נקודה זו שבה הנגזרת שונה מאפס . לכן נוכל להניח שאנו מטפלים בנקודות בהן הנגזרת שונה מאפס . כעת , קיים : $\boldsymbol{F^{(1)}(t) = f(\varphi(t))\varphi^{(1)}(t)}$ מהנתון , ומכיוון שקיים :

$\boldsymbol{\varphi^{(1)}(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(\varphi^{-1})^{(1)}(x)}}$, אז נקבל :

$$\boldsymbol{F\left(\varphi^{-1}(x)\right)^{(1)}(x) = F^{(1)}\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\varphi^{-1}(x)\right) =}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x})\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(1)}\left(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x})\right) \cdot \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x})\right) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$