תרגול 1

9 ביולי 2013

שדה המספרים המרוכבים

מוטבציה: בהתחלה העולם הסתדר עם המספרים הממשים $\mathbb{R}$ (ייצוג גרפי־ הישר הממשי —־0—– כל מספר מייצג את המרחב מהאפס)

הבעיה: למשוואה $x^2+1=0$ אין פתרון. מה עושים? ממצאים/מגדירים פתרון! מסומן i (כלומר $i^2=-1$)

כתוצאה מכך מקבלים את המספרים המרוכבים $\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\} = \underset{\text{complex}}{\mathbb{C}}$

לדוגמא $\pi+0\cdot i,\, 0+\sqrt{2}i,\, 2-3\in\mathbb{C}$

הערות:

1. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ ($\forall r\in\mathbb{R}\leftrightarrow r+0\cdot i\in\mathbb{C}$)
2. $a+bi,\, c+di\in\mathbb{C}$ שווים $a=c,\, b=d\Leftrightarrow$
3. עבור מספר מרוכב $z=a+bi$
   (א) a נקרא החלק הממשי $a=Re(z)$
   (ב) b נקרא החלק המדומה $b=Im(z)$
4. מספר מרוכב מהצורה $z=bi$ ($Re(z)=0$) נקרא מדומה טהור

על קבוצה המספרים המרוכבים מגדירים פעולות באופן טבעי. עבור $z_1=a_1+b_1i,\, z_2=a_2+b_2i$ מרוכבים מגדירים

1. חיבור:
   $z_1+z_2:=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$
   לדוגמא $(2+4i)+(\pi-2i)=(2+\pi)+2i$
2. כפל: (עובדים עם iכאילו היה מספר רגיל)
   $(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=a_1a_2+b_1a_2i+a_1b_2i+b_1b_2i^2=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i$
   לדוגמא $(1+i)(1-i)=1^2-i^2=1+1=2$

הצמוד המרוכב

הגדרה: עבור $z=a+bi$ מספר מרוכב מגדירים את הצמוד שלו להיות $\bar{z}:=a-bi$
לדוגמא $\overline{2-4i}=2+4i$
תכונות:

1. $\overline{(\bar{z})}=z$
2. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
4. $z+\overline{z}=2Re(z)$
5. $z-\overline{z}=2Im(z)$
6. $z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2\in\mathbb{R}$
7. $z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ממשי

ההצגה הוקטורית של המרוכבים

ניתן להתאים כל מספר מרוכב לוקטור ב $\mathbb{R}^2$(וקטור פיזיקלי עם 2 קורדינאטות)
$(a,b)\leftrightarrow a+bi$ (ציור ממחיש הכי טוב־המישור המרוכב)
וכ"כ להגדיר

1. $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$ ־ חיבור וקטורי רגיל
2. $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$ ־ בהתאמה להגדרה הקודמת.

הערך המוחלט (מודולו)

עבור $z=a+bi$ מרוכב מגדירים $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. "הערך המוחלט של z"
הערה: בהצגה הוקטורית $|z|$ פירושו המרחק מראשית הצירים (פיתגורס) ־הכללה של הערך המוחלט המוכר מהממשיים
תכונות:

1. $|z|^2=z\cdot\overline{z}$
2. $|z|\in\mathbb{R}$
3. $|z|\geq 0$ ומתקיים $|z|=0$ אמ"מ $z=0$
4. $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
5. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ אש"מ
6. $|z|=|-z|=|\overline{z}|$

הופכי

עבור $z = a + bi$ ניתן לחשב את ההפוכי שלו (כלומר למצוא wמרוכב כך ש $zw = 1$) בדרך הבאה:

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{a-bi}{|z|^2} = \frac{a}{|z|^2} - \frac{b}{|z|^2}i$

לדוגמא $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

תרגיל: פתור את המשוואה $z + z\overline{z} = 3\frac{3}{4} + 2i$

פתרון: נסמן $z = a + bi$ ואז נקבל $a + bi + a^2 + b^2 = 3\frac{3}{4} + 2i$

מיחידות ההצגה נקבל $b = 2,\ a + a^2 + b^2 = 3\frac{3}{4}$. ע"י פתירה של משוואה ריבועית נקבל $b = 2,\ a = -\frac{1}{2}$

ההצגה הפולרית של המרוכבים

בעזרת המישור המרוכב ומעבר מקורדינאטות קרטזיות לפולריות נתאים:

$(a, b) \leftrightarrow a + bi \leftrightarrow r\cos\theta + i \cdot r\sin\theta = r \cdot cis(\theta)$

הערות:

1. $0 \leq r \in \mathbb{R}$
2. $0 \leq \theta < 2\pi$. הזווית נמדדת מכיוון ציר ה x החיובי, נגד כיוון השעון (נקראת גם הארגומנט)
3. $z_1 = z_2$ אמ"מ $r_1 = r_2,\ \theta_1 = \theta_2$

מעבר בין ההצגות פולרית ← אלגברית: $a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$

דוגמא: $w = 2cis(\frac{\pi}{4}) = 2\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

אלגברית ← פולרית $r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \tan\theta = \frac{b}{a}$

לשים לב: המחזוריות של $\tan$ היא 180 מעלות (לא 360) ולכן צריך לשים לב בבחירת הזווית המתאימה

לדוגמא: נתון: $z \leftrightarrow (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ מצא הצגה פולרית:

פתרון: $r = \sqrt{2}$ לגבי הזווית־ $\tan\theta = 1$ אם נשתמש במחשבון נקבל $\theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

אבל אם מסתכלים בציור רואים כי הזווית צריכה להיות $\pi + \frac{\pi}{4}$. התוצאה שהתקבלה שווה ל $w = 2cis(\frac{\pi}{4})$ ממקודם.

משפט דה מואבר

יהיו $z_1 = r_1cis(\theta_1),\ z_2 = r_2cis(\theta_2) \in \mathbb{C}$ אזי $z_1z_2 = r_1r_2cis(\theta_1 + \theta_2)$. כלומר כפל בין 2 מספרים מרוכבים זה להכפיל את הרדיוסים ולחבר את הזוויות.

בפרט כאשר נכפיל z בעצמו נקבל $z^2 = r^2cis(2\theta)$

ובאופן כללי $z^n = r^ncis(n\theta)$

יישום־ הוצאת שורשים תרגיל: פתור את המשוואה $z^3 - 8i = 0$

פתרון: נעביר להצגה פולרית $z = r \cdot cis(\theta),\ 8i = 8cis(\frac{\pi}{2})$

$\Leftarrow r^3cis(3\theta) = 8cis(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$

$\Leftarrow$ מיחידות ההצגה $r = 2$ וגם $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\Leftarrow$ $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k$נציב ערכי k ונקבל

$\theta_1 = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi, \theta_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi 2 = \frac{9}{6}\pi, \theta_4 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi 3 = \frac{13}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi = \theta_1$

(* לפולינום מדרגה 3 יש בדיוק 3 שורשים)

לסיכום הפתרונות הם $2cis(\frac{\pi}{6}), 2cis(\frac{5\pi}{6}), 2cis(\frac{9\pi}{6})$

תרגיל: מצא פתרון למשוואה $z^n = 1$ (פתרונות אלו נקראים שורשי יחידה מסדר n)