מבחן לדוגמא 1 – אנליזה מתקדמת ומד"ר - 2019

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1.

א. קבעו האם הפונקציה הבאה רציפה בנקודה $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ננסה להוכיח שהגבול הוא אפס עם סנדביץ':

$$0 \le \frac{|x^2y|}{x^4+y^2} \le \frac{x^2|y|}{x^4} = \frac{|y|}{x^2} \to \text{אין גבול}$$

לא כל כך הלך, ננסה מסלולים

$$f(t,at) = \frac{at^3}{t^4+a^2t^2} = \frac{at}{t^2+a^2} = \frac{0}{a^2} \to ?$$

$$f(t,t^2) = \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$$

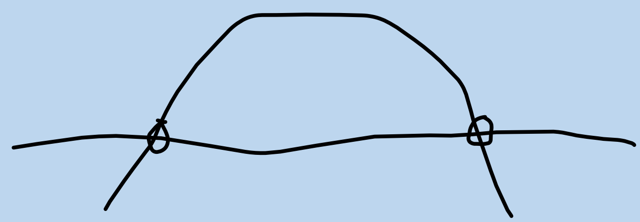
לכן הפונקציה <u>אינה</u> רציפה ב$(0,0)$

ב. קבעו האם הפונקציה הבאה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y)=x^2+7y^2-13x-1$ בתחום הכלוא בין העקומות $y=-x^2+13x-40$ ו $y=-8$.

פתרון:



סה"כ נאסוף נקודות חשודות בתחומים הבאים:

- פנים התחום
- על הפרבולה בתוך התחום
- על הישר בתוך התחום
- בחיתוך בין הפרבולה לישר

בסוף מציבים את כל החשודות בפונקציה $f$ ומגלים מה הכי גבוה, ומה הכי נמוך

ראשית נחשב את נקודות החיתוך, הנקודות בהן

$$-x^2+13x-40=-8$$

$$x^2-13x+32=0$$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{41}}{2}=9.7,3.29$$

לכן נקודות החיתוך $(x_1,-8),(x_2,-8)$ חשודות

כעת נחפש את הנקודות הקריטיות בפנים התחום, כלומר נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס (הנגזרות החלקיות מתאפסות שתיהן).

$f_x = 2x - 13$

$f_y = 14y$

הנקודות הקריטיות הן $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$ צריך לבדוק אם היא בתחום.

$x = \frac{13}{2}$ הוא בדיוק ערך איקס של קיצון הפרבולה, נציב אותו בפרבולה ונקבל

$$\frac{13^2}{4} - 40 > 0$$

לכן הנקודה אכן בתוך התחום.

כעת נבדוק חשודות בקצוות.

נתחיל מהפרבולה

$$g(x, y) = y + x^2 - 13x + 40 = 0$$

נציב במשוואות כופלי לגראנז'

$$f_x = a g_x$$

$$f_y = a g_y$$

$$g = 0$$

במקרה שלנו

$$2x - 13 = a(2x - 13)$$

$$14y = a$$

$$y + x^2 - 13x + 40 = 0$$

נפתח:

$$(2x-13)(1-a)=0$$

אם $a=1$ אז $y=\frac{1}{14}$

$$x^2-13x+40+\frac{1}{14}=0$$

$$x_{1,2}=7.97,5.02$$

לכן גם $\left(7.97,\frac{1}{14}\right),\left(5.02,\frac{1}{14}\right)$

אם $x=\frac{13}{2}$ אז מתוך הפרבולה $y=2.25$ ויש $a$ מתאים ולכן גם $\left(\frac{13}{2},2.25\right)$ חשודה.

נעבור לחשודות על הישר

$$g(x,y)=y+8=0$$

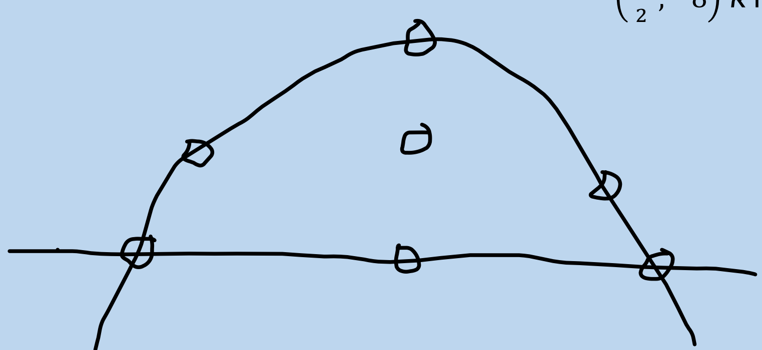
נציב במשוואות כופלי לגראנז'

$$2x-13=a\cdot 0$$

$$14y=a$$

$$y+8=0$$

הנקודה החשודה היא $\left(\frac{13}{2},-8\right)$



נציב את כל החשודות בפונקציה, ונגלה מה הגובה המקסימלי ומה המינימלי.

3. מצאו פתרון למד"ר $\sin(xy)y' = 2 - \frac{y}{x}\sin(xy)$ המקיים $y(2) = 0$ .

על מנת לבדוק אם המד"ר מדוייקת, נעביר לצורה השנייה

$$\sin(xy)\,dy - \left(2 - \frac{y}{x}\cdot\sin(xy)\right)dx = 0$$

נבדוק:

$$ycos(xy) \neq \frac{1}{x}\sin(xy) + ycos(xy)$$

נחפש גורם אינטגרציה שתלוי באיקס בלבד, קיים כזה אם הביטוי הבא תלוי בא בלבד

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1}{x}$$

ולכן

$$\mu(x) = e^{\ln(x)} = x$$

נכפול בא ונקבל את המד"ר

$$x\cdot\sin(xy)\,dy - (2x - y\cdot\sin(xy))dx = 0$$

נוודא שאכן המד"ר מדוייקת

$$\sin(xy) + xy\cdot\cos(xy) = \sin(xy) + xy\cdot\cos(xy)$$

כעת

$$f(x,y) = \int x\cdot\sin(xy)\,dy = -\cos(xy) + C(x)$$

נגזור לפי איקס ונשווה

$$f_x = ysin(xy) + C'(x) = -2x + ysin(xy)$$

לכן $C(x) = -x^2$

ביחד הפתרון נתון באופן סתום ע"י $f = C$

$$-\cos(xy) - x^2 = C$$

על מנת למצוא את הקבוע, נציב את תנאי ההתחלה $y(2) = 0$

$$-\cos(2 \cdot 0) - 2^2 = C$$

לכן

$$\cos(xy) + x^2 = 5$$

נחלץ את $y$

$$y = \frac{\arccos(5 - x^2)}{x}$$

4. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{1}{y}$ $(x^2+x+1)e^{(y^2)}$ המקיים $y(0) = -\sqrt{\ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)}$ .

היא פרידה, אז נפריד:

$$ye^{y^2}dy = \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

נחשב אינטגרל לכל אחד מהצדדים

$$\int ye^{y^2} = \frac{1}{2}e^{y^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

השתמשנו בנוסחא

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$y = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C\right)}$$

לפי תנאי ההתחלה $C = 0$ והפונקציה היא

$$y = -\sqrt{\ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)}$$

5. מצאו פתרון למד"ר $y''+2y'+y=\frac{1}{e^x}$ המקיים $y(0)=0$ , ו-$y'(0)=1$ .

מדובר במד"ר לינארית עם מקדמים קבועים מסדר גבוה

ראשית נמצא פתרון כללי להומוגנית, ונחשב את הפולינום האופייני

$$x^2+2x+1=0$$

לכן הפתרון הכללי להומוגנית הוא

$$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

נטפל באמצעות שיטת הניחוש בחלק האי הומוגני

$$1\cdot e^{-x}$$

מינוס אחד מאפס את הפולינום האופייני פעמיים ולכן ננחש

$$y_p=x^2e^{-x}a$$

נגזור פעמיים על מנת להציב במד"ר

$$y_p'=ae^{-x}(2x-x^2)$$

$$y_p''=ae^{-x}(2-2x-2x+x^2)=ae^{-x}(x^2-4x+2)$$

נציב במד"ר ונצמצם את $e^{-x}$

$$a(x^2-4x+2)+2a(2x-x^2)+ax^2=1$$

$$2a=1$$

$$a=\frac{1}{2}$$

סה"כ הפתרון הכללי למד"ר האי הומוגנית הוא

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{x^2 e^{-x}}{2} = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2}\right)$$

נציב תנאי התחלה

$$y(0) = 0$$

$$c_1 = 0$$

נגזור

$$y' = e^{-x}\left(c_2 + x - c_2 x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$1 = y'(0) = c_2$$

פתרון סופי:

$$y = e^{-x}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$$