

הנדסה מד"ר תשפג בוחן

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = x(y^3 - y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

פתרון: נסדר מחדש לקבל

$$y' + xy = xy^3$$

שזוהי משוואת ברנולי מהצורה $y' + p(x)y = q(x)y^n$ עם $n = 3$, $q(x) = x$, $p(x) = x$. נציב $z = y^{1-n} = y^{-2}$ ונקבל את המשוואה

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$$

נכפיל ב $1 - n$ ונקבל

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

או מפורשות

$$z' + (-2)xz = (-2)x$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ עבור $a(x) = -2x$, $b(x) = -2x$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)} \left(C + \int b(x)e^{A(x)} dx \right)$$

עבור $A(x) = \int a(x)dx = \int -2xdx = -x^2$ נציב ונקבל

$$\begin{aligned}z(t) &= e^{x^2} \left(C + \int -2xe^{-x^2} dx \right) \\&= e^{x^2} (C + e^{-x^2}) \\&= e^{x^2} C + 1\end{aligned}$$

נחזור ל y :

$$y(x) = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pm \sqrt{e^{x^2} C + 1}}$$

נציב תנאי התחלה $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = y(0) = \frac{1}{\sqrt{C + 1}}$$

$$\pm \sqrt{C + 1} = \sqrt{2}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס. בנוסף $C = 1$. לסיכום:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2} + 1}}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $(1 - \frac{y}{x}) y' = 1 - \frac{y}{x} - \frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 0$.

פתרון: נחלק ב $(1 - \frac{y}{x})$ לקבל:

$$y' = 1 - \frac{e^x}{2x(1 - \frac{y}{x})}$$

$$y' = 1 - \frac{e^x}{2(x - y)}$$

נגדיר $z = x - y$ ואז $z' = 1 - y'$ ונציב:

$$1 - z' = 1 - \frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z} = z'$$

$$e^x = 2zz'$$

ובצורה שקולה

$$e^x dx = 2z dz$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x + C = z^2$$

וקיבלנו

$$z = \pm \sqrt{e^x + C}$$

נחזור ל y :

$$y = x - z = x \pm \sqrt{e^x + C}$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 0$

$$0 = y(1) = 1 \pm \sqrt{e + C}$$

$$\pm \sqrt{e + C} = -1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את C

$$\sqrt{e + C} = 1$$

$$C = 1 - e$$

וסה"כ התשובה היא

$$y(x) = x - \sqrt{e^x + 1 - e}$$

3. כדורגל בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נבעט כלפי מעלה מהרצפה במהירות התחלתית של 20 m/sec . הניחו כי כוח המשיכה הוא קבוע ושווה ל mg , כאשר g קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ. הניחו כי $g = 10$. מצאו את גובה הכדור לאחר 2 שניות, במקרים הבאים:

(א) בהנחה שאין כוחות נוספים פרט לכוח המשיכה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $-g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השנייה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c . נתון כי $y'(0) = 20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt + 20$. המהירות לאחר 2 שניות היא $y'(2) = -g \cdot 2 + 20 = 0$ (מטר לשנייה).

(ב) בהנחה שכוח התנגדות האוויר בכל רגע שווה בגודלו לגודל המהירות של הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $-g - v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g - v = ma = a$$

או $-g - y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השנייה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + z = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = 1, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)} \left(C + \int b(x)e^{A(x)} dx \right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = x$ ונציב

$$e^{-x} \left(C - \int g e^x dx \right) = e^{-x} (C - g e^x) = e^{-x} C - g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-t} C - g$$

או

$$.y'(t) = e^{-t} C - g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = e^{-0} C - g = C - g$$

ומכאן $C = 20 + g$. מכאן שהמהירות אחרי 2 שניות היא

$$.y'(2) = e^{-2} \cdot (20 + g) - g = 30e^{-2} - 10 = -5.94$$

כלומר המהירות 5.94 כלפי מטה.