

## תרגול 13

**תרגיל** לכל גרף פשוט יש 2 קדקודים מאותה דרגה

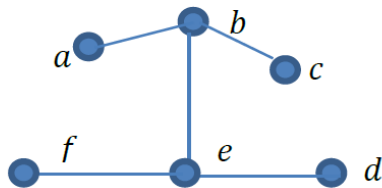
**פתרון** נניח יש  $n$  קדקודים. הדרגות האפשריות הן  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ .

נזכר שבגרף פשוט הדרגה שווה למספר השכנים, ולכן לא ייתכן שגם 0 וגם  $n - 1$  יהיו דרגות של קדקודים. (אם יש קדקוד בדרגה 0 אז לא ייתכן קדקוד בדרגה  $n - 1$ ...אני לא מרחיבה כי זה דומה לתרגיל 10) ולכן לפי שובר היונים יש 2 קדקודים מאותה דרגה.

### עצים

**הגדרה:** עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים. קודקוד בעץ שדרגתו 1 נקרא עלה.

**דוגמה:** העלים בעץ הם  $\{a, c, d, f\}$ .



**טענה** מספר הצלעות בעץ בעל  $n$  קדקודים הוא  $n - 1$

**טענה** אם מוסיפים צלע מעץ נקבל מעגל בתוך הגרף.

**טענה** אם נוריד צלע מעץ נקבל 2 רכיבי קשירות ששניהם עצים.

**הערה:** הטענות הנ"ל מראות שעץ הוא גרף מינימלי שהוא קשיר וכלי מעגלים.

**תרגיל** הוכח: אם מורידים עלה מעץ מקבלים גרף שהוא עץ.

**פתרון** השמטת עלה לא פוגעת בקשירות ולא במעגלים.

**תרגיל** בעץ בין כל 2 קדקודים יש מסלול פשוט יחיד.

**פתרון** אם בשלילה היו 2 מסלולים שונים אז היה מעגל. (אני לא מרחיבה...)

## תרגיל הוכח שבכל עץ עם לפחות 2 קדקודים יש לפחות 2 עלים

פתרון נתחיל מקדקוד כלשהו  $v \in V$  ונטייל על העץ כך שבכל שלב נעבור לשכן בלי לחזור על קדקוד פעמיים. התהליך יסתיים תוך לכל היותר  $|V|$  שלבים. בגרף אין מעגלים ולכן בסוף התהליך נגיע לקדקוד מדרגה 1. (למה? אם נגיע לקדקוד עם דרגה  $2 \leq$  וכבר הגענו לכל השכנים שלו- אז יש פה מעגל.)

אם כן, קיבלנו שמכל קדקוד ניתן להגיע לעלה.

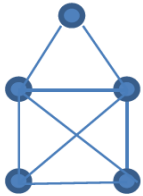
נניח  $u$  הגענו לעלה  $u$ . נתחיל הילוך חדש  $u$  ונגיע לעלה אחר  $w$ . וביחד יש לנו 2 עלים.

## מעגלי אוילר והמילטון

הגדרה: יהי  $G = (V, E)$  גרף לא מכוון. מסלול אוילר הוא מסלול שעובר בכל צלע בדיוק פעם אחת. מעגל אוילר הוא מעגל שעובר בכל צלע בדיוק פעם אחת.

משפט (אוילר): יהי  $G = (V, E)$  גרף קשיר לא מכוון.

- יש ב  $G$  מסלול אוילר אם ורק אם דרגות כל קדקודיו זוגיות או שכל הדרגות למעט 2 זוגיות.
- יש ב  $G$  מעגל אוילר אם ורק אם דרגות כל קדקודיו זוגיות.

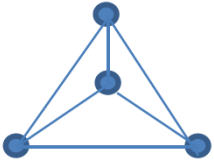


דוגמה: דרגות הקודקודים הן 2,4,4,3,3.

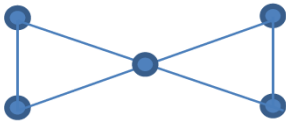
לכן יש בגרף מסלול אוילר אך אין מעגל אוילר.

הגדרה: יהי  $G = (V, E)$  גרף. מסלול המילטון הוא מסלול שעובר בכל קודקוד בדיוק פעם אחת. מעגל המילטון הוא מעגל שעובר בכל קודקוד בדיוק פעם אחת (למעט קודקוד ההתחלה בו עובר פעמיים).

דוגמה: דרגות הקודקודים הן 3,3,3,3 לכן לא קיים מעגל אוילר. מצד שני קיים מעגל המילטון.

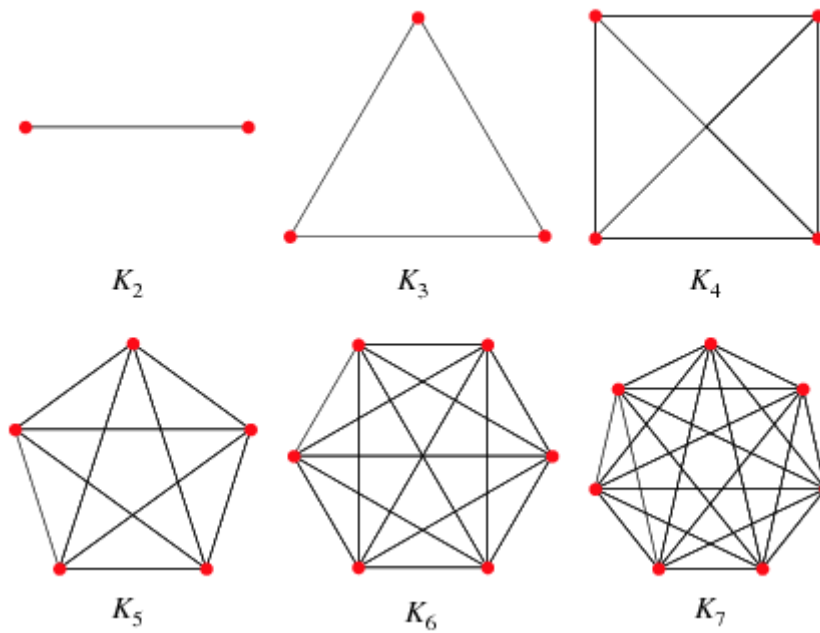


דוגמה: דרגות הקודקודים הן 2,2,4,2,2 לכן קיים מעגל אוילר. מצד שני לא קיים מעגל המילטון.



משפט אם בגרף עם  $n$  קדקודים הדרגות של כל הקדקודים  $\geq \frac{n}{2}$  אזי יש בגרף מעגל המילטון.

הגדרה גרף מלא  $K_n$  הוא גרף עם  $n$  קדקודים כך שדרגת כל קדקוד היא  $n - 1$



תרגיל

- א. מתי יש ב  $K_n$  מעגל אוילר? כאשר  $n$  אי זוגי. כי אז דרגות כל הקדקודים זוגיות.
- ב. מתי ב  $K_n$  יש מסלול אוילר אבל אין מעגל אוילר? כאשר  $n = 2$ . כי לכל  $n > 2$  זוגי יש לפחות 3 קדקודים עם דרגה אי זוגית (ואז אין מסלול אוילר).