משפט 1

תהא G חבורת-p אבלית. יהי $g \in G$ כך ש$o(g) = \exp(G)$(כלומר, g איבר מסדר מקסימלי). אזי קיימת ת"ח $L \trianglelefteq G$ כך ש$G = \langle g \rangle \oplus L$

הוכחה - מושמטת

מסקנה 2

כל חבורת-p אבלית איזומורפית למכפלה חיצונית ישרה של חבורות ציקליות.

הוכחה

על פי משפט 1 - קיימת $L \leq G$ כך ש$G \cong \langle g \rangle \times L$ו[מסתכמים על $G = A \otimes B \Leftarrow G \cong A \times B$]

כאשר g איבר מסדר מקסימלי בG, $\langle g \rangle$ חב' ציקלית.

L חבורת-p(על פי משפט לגרנז') מסדר קטן מסדר G, כי $|G| = o(g)\,|L|$ו$1 < o(g)$ אחרת $G = \{e\}$].

נחפש בL איבר מסדר מקסימלי $g_2 \in L$, ואז קיימת $L \geq L_2$ כך ש$L = \langle g_2 \rangle \otimes L_2$ ולכן $G \cong \langle g \rangle \otimes L \cong \langle g \rangle \times \langle g_2 \rangle \times L_@$, וחוזר חלילה עד שנקבל ת"ח L_k מסדר 1. ■

בשיעור הקודם הוכחנו: משפט 3

כל חבורה אבלית סופית איזומורפית למכפלה חיצונית ישרה של ת"ח p-סילוא שלה.

נסיק: המשפט היסודי לחבורות אבליות סופיות

משפט הבסיס לחבורות אבליות סופיות

1) כל חבורה אבלית סופית איז' למכפלה חיצונית ישרה של חבורות ציקליות שסדרן חזקת ראשוני.

2) הפרוק הזה יחיד עד כדי סדר הגורמים.

הוכחה

1) משפט 3+מסקנה 2

2) רעיון איזומורפיזם שומר על התפלגות הסדרים של אברי החבורה. אם הפירוקים שונים(לא רק עד כדי סדר) אז הפלגות הסדרים של האיברים שונה.

דוגמה

הראה $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

בשתי החבורות 16 איברים. לשתי בחבורות אקספ. 4. סדרים אפשריים בשתי בחבורות:

	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
1	1	1
2	3	7
4	12	8

מסקנה

$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\ncong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

דוגמה לתרגיל

מיין חבורות אבליות מסדר 18

תשובה

$18=2\times3^2$, לכן G מסדר 18 איזומורפית ל$H_2\times H_3$, כאשר:

- H_2 ת"ח 2-סילוא של G.
- H_3 ת"ח 3-סילוא של G.

H_2 מסדר 2 ולכן איז' ל$\mathbb{Z}_2$.
H_3 מסדר 9 ולכן איז' ל:

ראשית, $9=3^2$. לפי חלוקות של 2, שהן $\begin{matrix}(2) & \mathbb{Z}_{3^2}\\ (1,1) & \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\end{matrix}$, ולכן H_3 איז' ל$\mathbb{Z}_9$ או ל$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$, ובסה"כ קיבלנו

	exp
$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$	6
$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9$	18

מעריך של שתיהן שונה ולכן אינן איזומורפיות.

הכינוי "משפט הסביב" יובן על פי התרגיל הנבא:

תרגיל

הוכח ישירות את המשפט היסודי לחבורות אבליות, עבור חבורות אבליות סופיות עם מעריך ראשוני p.

הוכחה

אם $\exp(G)=p$, p ראשוני, אז לכל $e\neq g\in G$, $o(g)=p$. נתון G אבלית. נראה G מרחב-וקטורי מעל $\mathbb{F}_p$.

נגדיר לכל $x\in\mathbb{F}_p$ ולכל וקטור $g\in G$, $xg:=g^x$(ונפרש כפל וקטורים בתור חיבור)

מ"ו מקיים: קבוצת הוקטורים היא חבורה אבלית. זה נתון. ולכן $x_1,x_2\in\mathbb{F}_p$, $g\in G$

$$(x_1+x_2)\,g=g^{x_1+x_2}=g^{x_1}g^{x_2}=x_1g+x_2g$$

וכן לכל $x\in\mathbb{F}_p$, $g_1,g_2\in G$:

$$x\,(g_1+g_2)=(g_1g_2)^x=g_1^xg_2^x=xg_2+xg_2$$

לפי מה שלמדנו באלגברה לינארית למ"ו G מעל $\mathbb{F}_p$ יש בסיס.
כלומר, קיימים $g_1,...g_d \in G$ כך שלכל $g \in G$ קיימים $x_1,...x_d \in \mathbb{F}_p$ כך ש

$$g = \sum_{i=1}^{d} x_i g_i = g_1^{x_1} g_2^{x_2} \cdots g_d^{x_d} \in \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle \cdots \langle g_d \rangle$$

קיבלנו

$$G = \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle \cdots \langle g_d \rangle$$

כמובן, לכל $1 \le i \le d$, $\langle g_i \rangle \trianglelefteq G$(כי G אבלית).
לבסוף, $\sum_{i=1}^{d} x_i g_i = 0 \Leftarrow \forall_i x_i = 0$(אי תלות לינארית של הבסיס).
זה שקול ל: לכל $1 \le i_0 \le d$, $x_{i_0} d_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} x_i g_i$ גורר כל המקדמים אפס.
שקול ל: $g_{i_0}^{x_{i_0}} = g_1^{x_1} \cdots g_{i_0-1}^{x_{i_0-1}} g_{i_0+1}^{x_{i_0+1}} \cdots g_d^{x_d}$ גורר כל המקדמים אפס.

$$\{e\} = \langle g_{i_0} \rangle \cap \langle g_1 \rangle \langle g_2 \rangle \cdots \langle g_{i_0-1} \rangle \langle g_{i_0+1} \rangle \cdots \langle g_d \rangle$$

לסיכום הראינו:

$$G = \bigoplus_{i=1}^{d} \langle g_i \rangle$$

ולכן G איזומורפית למ"ח ישרה של חבורות ציקליות. ■

המושג הבא מכליל את המושר "מימד" של מ"ו.

הגדרה

דרגה של חבורה G(לאו דווקא אבלית) הוא המספר המינימלי של יוצרים לG.
כלומר:

$$\text{rank}\,(G) : \min \{|A| : A \subseteq G, \langle A \rangle = G\}$$

דוגמאות

1) $\text{rank}\,(G) = 1$ אמ"ם G ציקלית.

2) $\text{rank}\,(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9) = 1$(כי $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{18}$)

3) $\text{rank}\,(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = 3$(הערה: $\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ניתן לזיהוי אם מ"ו ממימד 3 מעל $\mathbb{F}_2$)

תרגיל

אם $p_1, p_2, ...p_d$ ראשוניים שונים, אזי $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_d} \cong \mathbb{Z}_{p_1 p_2 \cdots p_d}$

המשך דוגמאות

4) $\operatorname{rank}(S_n) = 2$ עבור $2 < n$.

תרגיל: הראה שיש לS_n קבוצה של יוצרים מגודל 2 (הדרכה: $\tau = (1,2), \sigma = (1,2,...n)$. הראה $S_n = \langle \tau, \sigma \rangle$)

הגדרה

חבורה G נוצרת סופית אם $\operatorname{rank}(G) < \infty$.

המשפט היסודי לחבורות אבליות נוצרות סופית

1. כל חבורה אבליות נוצרת סופית איזומורפית למכפלה חיצונית ישרה של חבורות ציקליות שסדרן חזקת ראשוני או שאיז' ל$\mathbb{Z}$.
2. הפירוק הזה יחיד עד כדי סדר ההגורמים.

דוגמאות

1. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$

טענה 1

$\mathbb{Q}$ אינה נוצרת סופית

הוכחה 1

נניח $\mathbb{Q}$ נוצרת סופית. כלומר קיימים $q_1, q_2, ...q_d \in \mathbb{Q}$ כך ש$\mathbb{Q} = \langle q_1, q_2, ...q_d \rangle$.

לכל $1 \leq i \leq d$ קיימים $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ כך ש$q_i = \frac{a_i}{b_i}$.

$\mathbb{Q} = \langle q_1, ...q_d \rangle \Leftarrow$ לכל רציונלי $q \in \mathbb{Q}$ קיימים $n_1, ...n_d \in \mathbb{Z}$ כך ש

$$q = \sum_{i=1}^{d} n_i q_i = \sum_{i=1}^{d} \frac{n_i a_i}{b_i}$$

מכאן, המכנה של q כאשר מצומצם$\leq b_1 \cdots b_d \Leftarrow \frac{1}{b_1 \cdots b_d + 1} \notin \langle q_1, ...q_d \rangle$. סתירה.

הוכחה 2

בהסתמך על המשפט היסודי לחב' אבליות נוצרות סופית, אם $\mathbb{Q}$ נוצרת סופית, לפי המשפט הנ"ל $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_d}$

ב$\mathbb{Q}$ סדר של כל איבר השונה מe הוא ∞. לכן באגף ימין אין שום גורם מסדר סופי.
מכאן $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}^d$ לאיזשהו d.

נניח $d \leq 2$. קיים איז' $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^d$, לכן קיימים $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$ כך ש

$$\varphi\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = (1, 0, ...0)$$
$$\varphi\left(\frac{a_2}{b_2}\right) = (0, 1, ..., 0)$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right) b_1 a_2 + (-b_2 a_1) \left(\frac{a_2}{b_2}\right) = 0$$

לכן

$$(0, 0, ...0) = \varphi(0) = \varphi\left(b_1 a_2 \left(\frac{a_1}{b_1}\right) + (-b_2 a_1) \left(\frac{a_2}{b_2}\right)\right) =$$

$$= b_1 a_2 \varphi\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + (-b_2 a_1) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right) =$$

$$= b_1 a_2 (1, 0, ...) - b_2, a_1 (0, 1, 0, ...) =$$

$$= (b_1, a_2, -b_2 a_1, 0, ...)$$

קיבלנו:

$$b_1 a_2 = 0$$

$$b_2 a_1 = 0$$

$\Leftarrow$$a_1 = a_2 = 0$ (כי $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$) $\Leftarrow$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = 0$, ולכן

$$\varphi\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = \varphi(0) = (0, 0, ...0)$$

סתירה. ∎

תרגיל

האם יש ל$\mathbb{Q}$ ת"ח איז' ל$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?