תירגול 13-14, 89-113, 2013:

א

ראינו

$$T^*: W^* \longrightarrow V^*$$

$$T^*(\varphi)(v) = \varphi(Tv)$$

אם V, W ממ"פ אז

$$T^*: W \longrightarrow V$$

ע"י:

$$y \mapsto \langle y, v_0 \rangle \quad (\text{ריס})$$

(כל וקטור v_0 ב-V מתאים לפונקציונאלי הנ"ל.)

כלומר T^* היא הה"ל כך ש-

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, v_0 \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$$

גם עבור מטריצות, $A^* = \bar{A}^t$ מקיים:

$$\langle Au, v \rangle = (Au)^t \bar{v} = u^t \overline{A^t \bar{v}} = \langle u, A^* v \rangle$$

תכונות (כה"ל, תואם לתכ' כלשהי)

1) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

2) $(kT)^* = \bar{k} T^*$

3) $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$

4) $T^{**} = T$

5) $[T^*] = [T]^*$

מסקנות (תכ' נוספות, הנובעות מהקודמות):

6) $\langle T^*(v), w \rangle = (v, T^{**}(w)) = \langle v, T(w) \rangle$

7) $\langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^* T(v) \rangle$

$$\langle T^* T(v), v \rangle = \overline{\langle v, T^* T(v) \rangle} \overset{\text{לכן}}{\in} \mathbb{R}$$

כנדרש עבור נורמה

תרג' 1.7:

$T: V\to V$ ה"ל

$W\subseteq V$ ת"מ T-אינו' $(\forall w\in W \quad T(w)\in W)$

הוכח $W^\perp$ T^*-אינו'.

פתרון:

$$\forall v\in W^\perp \qquad \langle T^*(v),w\rangle=\langle v,\underbrace{T(w)}_{\in W}\rangle=0$$

כי W T–אינו'

1.4:

$V=W=\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית.

מצא ה"צ עבור

$$T(x,y)=(2x+3y,2y)$$

פתרון:

$$S=\{e_1,e_2\}$$

$$\Downarrow$$

$$[T]_S=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[T]_S^*=[T^*]_S=\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}=\left([T^*(e_1)]_S \quad [T^*(e_2)]_S\right)$$

$$\Rightarrow \forall x,y\in\mathbb{R}^2 \qquad T^*(x,y)=T^*(xe_1+ye_2)=xT^*(e_1)+yT^*(e_2)=$$

$$x(2,3)+y(0,2)=\boxed{(2x,3x+2y)}$$

אופרטורים מיוחדים:

נורמלי: $T^*T=TT^*$

אוניטרי: $T^*=T^{-1}$ (במקרה T הפיכה)

(אזי, $T^*T=I=TT^*$, לכן הוא גם נורמלי)

כלל (סימטרי/אוניטרי): (שימו לב:

$T^*=T$

(שימו לב $T^*T=TT=TT^*$, לכן הוא גם נורמלי)

אנטי-סימטרי: $T^* = -T$

(שימו לב: $T^*T = -TT = T(-T) = TT^*$ לכן הוא גם נורמלי)

שאלה: מה ניתן לומר על הע"ע של T, T^* בכל מקרה?

תשובה:

נורמלי:

$$(*)\quad \|T(v)\| = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle = \langle v, TT^*(v)\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \|T^*(v)\|$$

לכן לכל λ ע"ע של A ידוע

$$\exists v\neq 0:\quad (A-\lambda I)v = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\|(A-\lambda I)v\| = 0$$

נסתכל על $A^* - \bar{\lambda} I$ עם אותו ו"ע:

$$\|(A^* - \bar{\lambda} I)v\| = \|(A-\lambda I)^* v\| \underset{(*)\text{ לפי}}{=} \|(A-\lambda I)v\| = 0$$

לכן $\bar{\lambda}$ ע"ע של A^* עם אותו ו"ע. גם הכיוון ההפוך נכון.

λ ע"ע של $A \iff \bar{\lambda}$ ע"ע של A^*

אוניטרי: נזכר: λ ע"ע של $A \iff \lambda^{-1}$ ע"ע של A^{-1} (עם אותו ו"ע)

(שימו לב, A הפיכה $\Leftarrow$ 0 לא ע"ע $\Leftarrow$ $\lambda \neq 0$ הגיוני.)

$$Av = \lambda v \quad / \cdot A^{-1}, \cdot \lambda^{-1}$$
$$\lambda^{-1} v = A^{-1} v$$

לכן: לכל λ ע"ע של A

ב-A^{-1} $\longrightarrow$ $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ $\Longleftarrow$ ב-A^*, בלבד

$\Downarrow$

ii)

$$|\lambda|^2=1 \Rightarrow |\lambda|=1$$

<u>צמ"ע:</u> נניח λ ע"ע של A:

כ-A $\longrightarrow$ $\lambda=\bar{\lambda}$ $\Longleftarrow$ כ-A^*, בגלל הנרמליות.

$$\Downarrow$$

$$\lambda\in\mathbb{R}$$

<u>אנטי-סימטרי:</u> נזכיר: λ ע"ע של A $\Longleftrightarrow$ $-\lambda$ ע"ע של $-A$ (עם אותו ~~[illegible]~~ ו"ע)

כ-$-A$ לפני $\longrightarrow$ $-\lambda=\bar{\lambda}$ $\Longleftarrow$ כ-A^*, בגלל הנורמליות

$$\Downarrow$$

$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ מדומה טהור.

<u>9.2:</u> $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שקילות:

א. A אוניטרית

ב. A מט' מעבר בין שני בסיס א"נ

ג. עמ' A הן בסיס א"נ

ד. שורות A " " "

נוכיח:

$$\begin{tikzcd} \text{א} \arrow[d] & \text{ב} \arrow[l] & \\ \text{ג} \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{טריוי'}"] & & \text{ד} \end{tikzcd}$$

ב ← א:

$$A=[I]^B_C=[I]^B_S\,[I]^S_C \qquad B=\{b_1,\dots,b_n\}$$

B,C א"נ $\qquad C=\{c_1,\dots,c_n\}$

$$A^*A=\underbrace{\begin{pmatrix}-\bar{c}_1-\\ \vdots\\ -\bar{c}_n-\end{pmatrix}^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}-\bar{b}_1-\\ \vdots\\ -\bar{b}_n-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|&&|\\ b_1&\cdots&b_n\\ |&&|\end{pmatrix}}_{I}\begin{pmatrix}|&&|\\ c_1&\cdots&c_n\\ |&&|\end{pmatrix}^{-1}}_{I}=I$$

א ← ג:

$$A^*A=I \qquad A=\begin{pmatrix}|&&|\\ c_1&\cdots&c_n\\ |&&|\end{pmatrix}$$

לכן $\langle c_i,c_j\rangle=\delta_{ij}$

ג ← ב: עמ' A א"נ ⇐ A מט' מעבר מבסיס
לבסיס הסטנדרטי, וכן הוא א"נ.

ד' ⇔ ג': טריוי כאשר מסתכלים על AA^* במקום A^*A. משלים הוכחה דומה.

הערה: A אוניטרית <= A הפיכה <= A מט' מעבר בין שני בסיסים $A=[I]^B_C$ <= קיים בסיס שלישי B' כך ש-A מט' מעבר מ-B' לבסיס הסטנדרטי: $A=[I]^B_C=[I]^{B'}_S$. (פשוט ניקח את B' להיות עמודות $[I]^B_C$).

משפט: A ממשית. התנאים הבאים שקולים:

א. A אוניטרית

ב. A שומרת מ"פ ($\langle Av,Aw\rangle=\langle v,w\rangle$)

ג. A שומרת אורך ($\|Av\|=\|v\|$)

הוכחה:
נראה

$$\text{א}\xrightarrow{\text{מיידי}}\text{ב}\xrightarrow{\text{מיידי}}\text{ג}$$

ג → א: [illegible]

א ← ב:

$$\langle Av,Aw\rangle=\langle v,A^*Aw\rangle=\langle v,w\rangle$$

ב ← ג:

$$\forall v,w \quad \langle Av,Aw\rangle=\langle v,w\rangle$$

בפרט $\forall v \quad \langle Av,Av\rangle=\langle v,v\rangle$

7

ב <- א:

טענת עזר 1:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

אם לכל $u,v \in \mathbb{R}^n$ $\langle Av, u \rangle = 0$ אז $A=0$.

$$\forall v,u \quad \langle Av, u \rangle = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall v \quad \langle Av, Av \rangle = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall i \quad \langle Ae_i, Ae_i \rangle = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall i \quad Ae_i = 0$$
$$\Downarrow$$
העמודה ה-i ב-A
$$\Downarrow$$
$$A=0$$

טענת עזר 2:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית. אם לכל $v \in \mathbb{R}^n$ $\langle Av, v \rangle = 0$ אז $A=0$.

(שימו לב, זה לא מקרה פרטי של טענה 1. החלשנו את התנאי: "Av לא מאונך לכל u, רק את v" והוספנו גם סימטריות במקום)

$\forall u, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle A(u+w), (u+w) \rangle = \underbrace{\langle Au, u \rangle}_{0} + \langle Au, w \rangle + \langle Aw, u \rangle + \underbrace{\langle Aw, w \rangle}_{0} = 0$$

$$\langle Aw, u \rangle \overset{*}{=} \langle w, A^* u \rangle \overset{\mathbb{R}}{=} \langle w, A^t u \rangle \underset{\text{סימטרית}}{=} \langle w, Au \rangle \underset{\text{כי ב-}\mathbb{R}}{=} \langle Au, w \rangle$$

לכן:

$$2 \langle Au, w \rangle = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\langle Au, w \rangle = 0 \overset{\text{טענה 1}}{\Longrightarrow} A=0$$

נחזור ל-ב'

~~לכל~~ $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\|Av\| = \|v\|$$

$$\Downarrow$$

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle A^*Av, v \rangle - \langle v, v \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle (A^*A - I)v, v \rangle = 0$$

$$(A^*A - I)^t = A^tA - I = A^*A - I$$

לכן סימטרית וממשית, לפי 2 ~~מתקיים~~

ולכן:

$$A^*A = I$$

<u>טענה:</u> A צמ"ע. אז הו"ע השייכים לע"ע שונים, מאונכים.

ע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_n \overset{\text{הראינו}}{\in} \mathbb{R}$ שונים

$v_1, \dots, v_n$ הו"ע השייכים להם

$$\lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \langle Av_i, v_j \rangle = \langle v_i, A^* v_j \rangle =$$

$$\langle v_i, Av_j \rangle = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \bar{\lambda}_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle v_i, v_j \rangle = 0 \Rightarrow \underset{\text{סתירה!}}{\lambda_i - \lambda_j = 0} \vee \boxed{\langle v_i, v_j \rangle = 0}$$

בלי קשר לנושא הנוכחי

תיקון לטעות חוזרת:

$ab=0 \Rightarrow a=0 \lor b=0$

אם a או b סקלרים.

לא נכון לגבי שני וקטורים $\quad (1\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$

וקטור ומטריצה $\quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$

או שתי מט' $\quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=(0)$