מבנים אלגבריים - תירגול 1

21 בפברואר 2019

הקדמה

תהא X נסתכל על הקבוצה $X^X=\{f:X\to X\}$, עבור שתי פונקציות $f,g\in X^X$ מוגדרת ההרכבה $g\circ f\in X^X$ כך: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. זהו מונואיד. עם יחידה = פונק' הזהות

נגדיר: S_X להיות קבוצת הפונקציות ההפיכות (האיברים ההפיכים). זוהי חבורה.
מי אלו הפונצקיות ההפיכות? הפונקצי' שהם חח"ע ועל. במקרה ש X סופית. התשובה פשוטה יותר: פונקציה היא הפיכה אמ"מ היא חח"ע אמ"מ היא על
דוגמא: עבור $X=\{1,2,3\}$ נסתכל על הפונקציות $f:1\to1,2\rightleftarrows3, g:1\rightleftarrows2,3\to3$
אזי $g\circ f:(1,2,3), f\circ g:(1,3,2)$. בפרט $g\circ f\neq f\circ g$.
הערה: $id:X\to X$ המוגדרת $id(x)=x$ נקראת הזהות והיא מקיימת $id\circ f=f\circ id=f$

החבורה הסימטרית S_n

עבור $X=\{1,2,\dots n\}$, הקבוצה $\{f:X\to X\mid f \text{ bijection }\}$ עם הרכבה היא חבורה המסומנת כ S_n ונקראת החבורה הסימטרית (או חבורת התמורות). היחידה בחבורה היא פונקצית הזהות.

דרך סטנרטית להציג תמורה היא בצורה $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$. דרך נוספת היא בעזרת מחזורים זרים. נדגים זאת בעזרת S_6.
תהא $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix}\in S_6$ תמורה. אזי ניתן לרשום אותה כ $(1)(45)(2,3,6)$
(הפירוש הוא ש 2 הולך ל 3, 3 הולך ל 6 ו 6 הולך ל 2).
הגדרה: הסימון $(i_1,i_2\dots i_m)\in S_n$ מסמן פונקציה המוגדרת

$$\begin{aligned} i_1&\mapsto i_2\\ i_2&\mapsto i_3\\ &\vdots\\ i_{m-1}&\mapsto i_m\\ \forall f\notin\{i_1\dots,i_m\}j&\mapsto j\end{aligned}$$

בסימונים אלו $(1)(45)(2,3,6)$ מתפרש כהרכבת פונקציות ששוה לפונקציה $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix}\in S_6$.

הגדרה : מחזור מאורך m הוא תמורה מהצורה $(i_1, i_2 \ldots i_m)$. מחזורים יקראו זרים אם אין להם מספר משותף.
הערות:

1. מחזורים מאורך 1 נוהגים להשמיט בכתיב המחזורים.

2. מחזור מאורך 2 נקרא חילוף.

3. המחזור $(i_1, i_2 \ldots i_m)$ ניתן להצגה גם כ $(i_1, i_2 \ldots i_m) = (i_2 \ldots i_m, i_1)$ וכן על זו הדרך. למשל $(1,2,3,4) = (2,3,4,1) = (3,4,1,2) = (4,1,2,3)$.

4. מחזורים זרים מתחלפים ביניהם. כלומר $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. למשל $(1,2,5)(6,3) = (6,3)(1,2,5)$.

5. ההופכי של $\sigma = (i_1, i_2 \ldots i_m)$ הוא $\sigma^{-1} = (i_m, i_{m-1} \ldots i_1)$. למשל $(1,3,4)^{-1} = (4,3,1)$. הוכחה: נראה שההרכבה זזו תמורת הזהות: לאן ההרכבה שולחת את $k \in [n]$? אם $k = i_j \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ אז $\sigma^{-1}(\sigma(k)) = \sigma^{-1}(i_{j+1 (\mathrm{mod}\ m)}) = i_j$. אם לא אז הוא נקודת שבת של שתי התמורות ולכן נשאר במקום.

6. הכפלת מחזור בעצמו $(1,2,3,4,5,6)^4 = (1,5,3)(2,6,4)$. בצירוף עם הערה 4 נקבל כי $[(1,2,5)(6,3)]^4 = (1,2,5)^4(6,3)^4$

7. מחזור באורך m בחזקת m שווה לזהות - $(i_1, i_2 \ldots i_m)^m = id$. למשל, $(1,2,5)$ הוא מאורך 3 (שימו לב כי $(1,2,3)^3 = id$). לכן בההערה הקודמת נקבל $(1,2,5)^4(6,3)^4 = (1,2,5)$.

8. מתקיים כי $(i_1, i_2 \ldots i_m) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{m-1}, i_m)$ ולכן כל תמורה ניתן להציג כמכפלה של חילופים (לאו דוקא זרים). למשל $(1,3,5,6) = (1,3)(3,5)(5,6)$.