תרגיל מספר 1 מבנים אלגבריים

23 באוקטובר 2017

1. תזכורת - הגדרה: $(\mathbb{F},+,\cdot)$ יקרא שדה אם:
   - אקסיומות חיבור:
     - סגירות: $\forall x,y\in\mathbb{F}: x+y\in\mathbb{F}$
     - קיבוציות: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}:(x+y)+z=x+(y+z)$
     - חילופיות: $\forall x,y\in\mathbb{F}: x+y=y+x$
     - קיום נטרלי: $\exists 0\in\mathbb{F}:\ \forall x\in\mathbb{F}: x+0=x$
     - קיום נגדי: $\forall x\in\mathbb{F}\exists\,(-x)\in\mathbb{F}: x+(-x)=0=(-x)+x$
   - אקסיומות כפל:
     - סגירות: $\forall x,y\in\mathbb{F}: x\cdot y\in\mathbb{F}$
     - קיבוציות: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}:(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$
     - חילופיות: $\forall x,y\in\mathbb{F}: x\cdot y=y\cdot x$
     - קיום נטרלי: $\exists 1\in\mathbb{F}:\ \forall x\in\mathbb{F}: 1\cdot x=x$
     - קיום הופכי: $\forall 0\neq x\in\mathbb{F}\exists x^{-1}\in\mathbb{F}: x\cdot x^{-1}=1=x^{-1}\cdot x$
   - אקסיומות פילוג: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}: x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

(א) יהא $(\mathbb{F},+,\cdot)$ שדה. הוכיחו כי $(\mathbb{F},+)$ חבורה. [בפרט $(\mathbb{C}/\mathbb{R}/\mathbb{Q},+)$ הם חבורות].

(ב) יהא $(\mathbb{F},+,\cdot)$ שדה. נגדיר $\mathbb{F}^{\times}=\mathbb{F}\backslash\{0\}$ כאשר 0 הוא האיבר הנטרלי לחיבור. הוכיחו כי $(\mathbb{F}^{\times},\cdot)$ חבורה. [בפרט $(\mathbb{C}^{*}/\mathbb{R}^{*}/\mathbb{Q}^{*}\cdot)$ הם חבורות].

2. כיתבו את ההגדרה של מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. (השלימו: $(V,+)$ יקרא מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ אם:...) והוכיחו כי $(V,+)$ חבורה. [בפרט $(\mathbb{R}^n,+)$ חבורה, $((\mathbb{Z}_2)^n,+)$ חבורה.]

קבעו לכל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות קבע האם היא אגודה/מונאיד/חבורה. במידה שקיימת יחידה (רגילה/שמאלית/ימנית) מצא אותה. במידה שמדובר בחבורה מצא את ההופכי של כל איבר.

1. קבוצת שורשי היחידה מסדר n, כלומר הקבוצה $X=\{a\in\mathbb{C}\,|\,a^n=1\}$ עם הפעולה של כפל רגיל של מספרים מרוכבים.

2. קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר $n > 1$, כלומר $\mathbb{F}^{n\times n}$ עם פעולת כפל מטריצות

3. יהא $\mathbb{F}$ שדה. אזי הקבוצה $G = \mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$ עם הכפל של השדה.

4. המטריצות $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid 0 < a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

5. הטבעיים $G = \mathbb{N}$ עם פעולה $a * b = a^b$

6. תת קבוצה של הפולינומים $X = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|p(1) = 0\}$ עם חיבור פולינום רגיל.

7. הטבעיים $G = \mathbb{N}$ עם פעולה מקסימום $a * b = \max\{a, b\}$

8. קטעים פתוחים בקבוצת הממשיים

$$G = \left\{\, (a,b) \subseteq \mathbb{R} \,|\, a < b,\ a.b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \,\right\} \cup \{\emptyset\}$$

עם פעולת חיתוך קבוצות.

9. תת קבוצה של המטריצות $G = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

10. תת קבוצה של מטריצות משולשיות $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.