תורת המספרים האלגברית (88798) תשפ"א
תרגיל 8

1. יהי $|\cdot|_\infty$ הערך המוחלט הרגיל על $\mathbb{R}$ או על $\mathbb{C}$. בשאלה הזאת נוכיח משפט נוסף של אוסטרובסקי: יהי K שדה שהוא שלם עבור הערכה ארכימדית $|\cdot|$. אזי קיים איזומורפיזם $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \sigma$ או $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \sigma$ ומספר ממשי $s > 0$ כך ש־ $|a| = |\sigma(a)|_\infty^s$ לכל $a \in K$.

   (א) הוכח שהמאפיין של K הינו אפס. לכן קיים שיכון $\mathbb{Q} \subset K$.

   (ב) הוכח שקיים שיכון $\mathbb{R} \subset K$ וכי ניתן להניח, על ידי החלפה של $|\cdot|$ בהערכה שקולה, כי הצמצום של $|\cdot|$ ל־ $\mathbb{R}$ הינו $|\cdot|_\infty$.
   רמז: $\mathbb{R}$ הינו ההשלמה של $\mathbb{Q}$ ביחס להערכה הניתנת על ידי הערך המוחלט הרגיל.

   (ג) יהי $a \in K$. נגדיר את הפונקציה הבאה:

   $$\begin{aligned} f_a : \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ f_a(z) &= |a^2 - (z + \overline{z})a + z\overline{z}|. \end{aligned}$$

   הוכח כי f_a רציפה ושהמינימום $m_a = \min\{f_a(z) : z \in \mathbb{C}\}$ קיים.

   (ד) הוכח שאם $m_a = 0$ לכל $a \in K$, אזי ההרחבה $K/\mathbb{R}$ אלגברית, וזה גורר את המשפט המבוקש.

   (ה) אז יהי $a \in K$. הוכח שקיים $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : f_a(z) = m_a\}$ עם $|z_0|_\infty$ מקסימלי.

   (ו) נניח בשלילה כי $m_a > 0$ ונבחר $0 < \varepsilon < m_a$. יהי $z_1 \in \mathbb{C}$ שורש של הפולינום

   $$g(x) = x^2 - (z_0 + \overline{z}_0)x + z_0\overline{z}_0 + \varepsilon.$$

   הוכח כי $f_a(z_1) > m_a$.

   (ז) לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר פולינום $G_n(x) = (g(x) - \varepsilon)^n - (-1)^n\varepsilon^n$. הוכח כי $G_n(z_1) = 0$ וכי $|G_n(a)|^2 \geq f_a(z_1)m_a^{2n-1}$.

   (ח) הוכח כי $|G_n(a)| \leq m_a^n + \varepsilon^n$.

   (ט) הסק כי $f_a(z_1) \leq m_a$, בסתירה לסעיף השישי.

2. תהי S קבוצה עם סדר חלקי. נניח שלכל $s, t \in S$ קיים חסם מלעיל משותף, כלומר איבר $u \in S$ המקיים $s \leq u, t \leq u$. מערכת פרויקטיבית של חוגים מורכבת מן המידע הבא:

   - חוג R_s לכל $s \in S$.
   - הומומורפיזם $\varphi_{ts} : R_t \to R_s$ לכל זוג $s \leq t$ של איברים של S, כך שמתקיים $\varphi_{us} = \varphi_{ts} \circ \varphi_{ut}$ כאשר $s \leq t \leq u$.

   הגבול הפרויקטיבי $\varprojlim R_s$ הינו התת־חוג של $\prod_{s \in S} R_s$ של כל האיברים $(a_s)_s$ המקיימים $a_s = \varphi_{ts}(a_t)$ לכל $s \leq t$.

   יהי K שדה מספרים, יהי $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_K$ אידאל ראשוני לא אפסי, ויהי $\widehat{\mathcal{O}}$ חוג ההערכה של $K_\mathfrak{p}$. הוכח כי $\widehat{\mathcal{O}} \simeq \varprojlim \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^n$.

במערכת הפרויקטיבית הזאת, $S = \mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל, $R_n = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכל $m \le n$ ההומומורפיזם $\varphi_{nm} : \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^n \to \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m$ הינו רדוקציה מודולו $\mathfrak{p}^m$.

3. יהי $p > 2$ ראשוני. תהי $(\mathbb{Z}_p^\times)^2 = \{a^2 : a \in \mathbb{Z}_p^\times\}$. הוכח כי $\mathbb{Z}_p^\times/(\mathbb{Z}_p^\times)^2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
בונוס: הוכח שהחבורה $\mathbb{Z}_2^\times/(\mathbb{Z}_2^\times)^2$ בעלת שמונה איברים.

4. יהי $p > 2$ ראשוני ויהי $u \in \mathbb{Z}_p^\times \setminus (\mathbb{Z}_p^\times)^2$. תהי $K/\mathbb{Q}_p$ הרחבה ממעלה 2. הוכח כי K איזומורפית לאחד מן השדות $\mathbb{Q}(\sqrt{u}), \mathbb{Q}(\sqrt{p}), \mathbb{Q}(\sqrt{up})$.

שים לב כי לשדה $\mathbb{Q}$ יש אינסוף הרחבות ריבועיות שונות עד כדי איזומורפיזם.

5. יהי $p > 2$ ראשוני. לכל $\lambda \in \mathbb{F}_p^\times$, יהי $[\lambda] \in \mathbb{Z}_p$ השורש ה־$(p-1)$־י של 1 השייך למחלקה $\lambda \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{F}_p$. נגדיר $[0] = 0$.

(א) הוכח כי $[\lambda\mu] = [\lambda][\mu]$ לכל $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_p$.

(ב) הוכח כי לא תמיד $[\lambda + \mu] = [\lambda] + [\mu]$.

(ג) הוכח כי

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_n] p^n : \lambda_n \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

(ד) הוכח כי

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_n] p^n \equiv [1 + \lambda_0] + [\lambda_1 + f(\lambda_0)]\, p \bmod p^2,$$

כאשר $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ הינו הפולינום $f(x) = \frac{x^p + 1 - (x+1)^p}{p}$.

לפעמים נוח לחשוב על איברים של $\mathbb{Z}_p$ כטורים כמו בסעיף השלישי, אבל הסעיף הזה מראה שלא כל כך פשוט לחבור ולהכפיל את הטורים האלה. זו נקודת ההתחלה של התורה של וקטורים של וויט. נחזור אליה בתרגיל בעתיד הקרוב.