אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 6

9 בינואר 2020

1. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

(א) e^{1+2i}

(ב) $e^{5\text{cis}\pi}$

(ג) $\sin(1+i)$

(ד) $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6})$

(ה) $\sin(2\text{cis}\frac{\pi}{2})$

(ו) $\cos(i)$

<u>פתרון:</u>

א. $e^{1+2i} = e^1\text{cis}2 = e\text{cis}2$.

ב. $e^{5\text{cis}\pi} = e^{-5}$.

ג. $\sin(1+i) = \frac{e^{i(1+i)}-e^{-i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+i}-e^{1-i}}{2i} = \frac{e^{-1}\text{cis}1-e^1\text{cis}(-1)}{2i} = \frac{e^{-1}(\cos 1+\sin 1\cdot i)-e(\cos(-1)+\sin(-1)i)}{2i}$. כעת נקבץ ממשיים ומדומים, ניזכר ש־ $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$, וניזכר ש $\frac{1}{i} = -i$: לכן נקבל: $-\sin 1\frac{e^{-1}+e}{2}\cos 1\frac{e^{-1}-e}{2}i$.

ד. $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6}) = \frac{e^{i\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}+e^{-i\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{2\text{cis}\frac{4\pi}{6}}+e^{2\text{cis}\frac{10\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{-1+\sqrt{3}i}+e^{1-\sqrt{3}i}}{2} = \frac{e^{-1}\text{cis}\sqrt{3}+e\text{cis}(-\sqrt{3})}{2}$. נדלג ישר לקיבוץ איברים דומים ולצורה הקרטזית: $= \frac{\cos\sqrt{3}(e+e^{-1})+i\sin\sqrt{3}(e^{-1}-e)}{2} = \cos\sqrt{3}\frac{e+e^{-1}}{2}+\sin\sqrt{3}\frac{e^{-1}-e}{2}i$.

ה. $\sin(2\text{cis}\frac{\pi}{2}) = \frac{e^{i\cdot 2i}-e^{-i\cdot 2i}}{2i} = \frac{e^{-2}-e^{2}}{2i} = \frac{e^2-e^{-2}}{2}i$ (כאשר המעבר האחרון נובע מהעובדה $\frac{1}{i} = -i$).

ו. $\cos(i) = \frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$. שימו לב שזה יצא גדול מ1, מה שלא קורה בממשיים!

2. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):

(א) $\sin(\overline{z}) = \overline{\sin(z)}$.

(ב) $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$.

(ג) $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$.

<u>פתרון:</u>

א. $\sin(\overline{z}) = \frac{e^{i\overline{z}}-e^{-i\overline{z}}}{2i} = \frac{e^{\overline{-iz}}-e^{\overline{iz}}}{2i}$. כעת, כיון שראינו בתרגול ש $e^{\overline{z}} = \overline{e^{z}}$ נוכל להמשיך: $\frac{\overline{e^{-iz}}-\overline{e^{iz}}}{2i} = \frac{\overline{e^{-iz}-e^{iz}}}{2i} = $. כדי שגם במכנה תהיה הצמדה נרשום: $2i = \overline{-2i}$ ונקבל: $\frac{\overline{e^{-iz}-e^{iz}}}{\overline{-2i}} = \overline{\left(\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)} = \overline{\sin(z)}$.

ב. באופן דומה: $\cos(\overline{z}) = \frac{e^{i\overline{z}}+e^{-i\overline{z}}}{2} = \frac{e^{\overline{-iz}}+e^{\overline{iz}}}{2} = \frac{\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}}}{2} = \frac{\overline{e^{iz}+e^{-iz}}}{\overline{2}} = \overline{\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)} = \overline{\cos(z)}$.

ג. נפתח את צד ימין:

$$\cos z\cos w - \sin z\sin w = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} =$$

שימו לב שהמכנה בשני המקרים הוא 4, ושהסימן באמצע הופך לפלוס כיון שבמכנה הימני יש בעצם -4. כלומר מקבלים:

$$= \frac{1}{4}\left(\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\cdot\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)+\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\cdot\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{-i(z-w)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{-i(z-w)} + e^{-i(z+w)}\right) =$$

כעת נצמצם את אלה שמשנים סימן ונסכום את שווי הסימן, ונקבל:

$$= \frac{1}{4}\left(2e^{i(z+w)} + 2e^{-i(z+w)}\right) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w)$$

בהצלחה!