

אינפי 1 – תרגיל 4

שאלה 1

עבור הסדרות הבאות, קבעו האם קיים גבול (גם במובן הרחב), ואם כן מצאו אותו והוכיחו שהוא אכן הגבול (בכל דרך שתבחרו):

א. $\frac{1}{n} \cdot \frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$

ב. $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$

ג. $\frac{3^{n-1}}{2^n}$

ד. $\frac{3^n}{2^{(n^2)}}$

ה. $\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}$

ו. $\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}}$

שאלה 2

חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n$.

שאלה 3

הוכיחו/הפריכו:

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$, אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ ו a_n מתכנסת, אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

שאלה 4

תהי a_n סדרה מתכנסת לגבול ממשי $L \in \mathbb{R}$. תהי b_n סדרה חסומה שאינה מתכנסת. הוכיחו: הסדרה $c_n = a_n b_n$ מתכנסת אם"ם $L = 0$.

שאלה 5

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \rightarrow 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. $(a_n)^n \rightarrow 1$

ב. $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \rightarrow 0$ וכן $a_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו:

ג. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$

ד. $(a_n)^n \rightarrow 0$

ה. $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0$

שאלה 6

הוכיחו שאין סדרה חיובית המתכנסת ל-0 הכי מהר או הכי לאט.

הדרכה: הראו שאם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים חיוביים המקיימת $a_n \rightarrow 0$, אזי קיימות סדרות $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימות $|b_n| < |a_n| < |c_n|$ אבל $b_n \rightarrow 0$ וגם $c_n \rightarrow 0$.

שאלה 7

נניח ש- $c \in \mathbb{R}$. נניח ש- $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c$. נניח ש- $a_n \rightarrow \infty$.

- א. אם $c \neq 0$, האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, מה ניתן לומר על הגבול? אם לא, מצאו דוגמא נגדית.
- ב. אם $c = 0$, האם b_n חסומה? הוכיחו את תשובתכם (שימו לב: התשובה היא גורפת. כלומר, הוכיחו שהיא חסומה בהכרח, או שהיא לא חסומה בהכרח).
- ג. בסעיף ב', האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, הוכיחו. אם לא – מצאו דוגמא נגדית.

בהצלחה!