תרגיל בית 7 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/ סגורה/ רציפה:

א. $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

ב. $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_2(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

ג. $f_3:X\to\mathbb{R}$ עבור $X=[2,3]\cup[4,5)$ המוגדרת ע"י $f_3(x)=\begin{cases}1 & x\in[2,3]\\ x & x\in[4,5)\end{cases}$.

<u>שאלה 2</u>

תהי X קבוצה אינסופית. יהי x_0 איבר ב- X. נגדיר
$\tau=\{A\subseteq X: x_0\notin A\}\bigcup\{B\subseteq X: X\setminus B \text{ is finite}\}$.

א) הוכיחו ש- τ טופולוגיה על X.
ב) הראו שכל הנקודונים ב- X, פרט ל- $\{x_0\}$, הינם סגורים. מה לגבי $\{x_0\}$?
ג) הראו: $cl(A)=\begin{cases}A & A \text{ is finite}\\ A\cup\{x_0\} & \text{otherwise}\end{cases}$.
ד) הראו: $int(A)=\begin{cases}A & X\setminus A \text{ is finite}\\ A\setminus\{x_0\} & \text{otherwise}\end{cases}$.

<u>שאלה 3</u>

יהי X מרחב טופולוגי, U קבוצה פתוחה וְ- A קבוצה צפופה.

הוכיחו $U\subseteq cl(A\cap U)$. הסיקו: $cl(U)=cl(A\bigcap U)$.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl(B(a,r))=B[a,r]$. מצאו דוגמא נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

שאלה 5

א. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה בת מניה. הוכיחו ש- $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

ב. מצאו: $\operatorname{int}(\mathbb{Q}), cl(\mathbb{Q})$ (ב- $\mathbb{R}$).

ג. הוכיחו ש- $A:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1=0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^n$ ו- $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

שאלה 6

תהיינה τ_1,τ_2 טופולוגיות על X כך ש- $\tau_1\subseteq\tau_2$. הוכיחו:

א. F סגורה ב- (X,τ_1) $\Leftarrow$ F סגורה ב- (X,τ_2).

נסמן ב- $\operatorname{int}_{\tau_i}(A)$ את הפנים של A במרחב (X,τ_i) (כנ"ל עבור $cl_{\tau_i}(A)$).

ב. הוכיחו או הפריכו: $\operatorname{int}_{\tau_1}(A)\subseteq\operatorname{int}_{\tau_2}(A)$, $cl_{\tau_1}(A)\supseteq cl_{\tau_2}(A)$.

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

ג. יהי $(\mathbb{R},T)$ הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

$(0,1], (0,1), [0,1], [0,1)$.

בהצלחה!