תרגול 6

<u>תזכורת</u>: (משפט פוביני-טונלי): יהיו $\left(X,S,\mu\right)$ ו $\left(Y,G,\nu\right)$ יהיו σ - סופיות, ותהי f פונקציה מ $X\times Y$ ל $[0,\infty]$ מדידה $S\times G$ או $f\in L^1\left(X\times Y,S\times G,\mu\times\nu\right)$. אזי

$$\int f d\mu\times d\nu=\iint f\left(x,y\right)d\mu\left(x\right)d\nu\left(y\right)=\iint f\left(x,y\right)d\nu\left(y\right)d\mu\left(x\right).$$

כלומר, ניתן להחליף סדר אינטגרציה.

1. <u>תרגיל ("כשלון חרוץ" של משפטי פוביני וטונלי):</u>

יהיו הממ"חים $\left(\left[0,1\right],L\left(\left[0,1\right]\right),u\right),\left(\left[0,1\right],P\left(\left[0,1\right]\right),v\right)$ כאשר $u=m$ היא מידת לבג ו- $v=\#$ היא מידת הספירה, ותהי $w=u\times v=m\times\#$ מידת המכפלה של u,v . נגדיר את האלכסון $D=\left\{\left(x,y\right):0\le x=y\le 1\right\}$.

א. הוכיחו כי האלכסון D הוא מדיד במרחב המכפלה.

ב. הוכיחו כי המספרים

$$\int\limits_{[0,1]\times[0,1]}I_D\left(x,y\right)dw,\ \int\limits_{[0,1]}\int\limits_{[0,1]}I_D\left(x,y\right)dm\left(x\right)d\#\left(y\right),\ \int\limits_{[0,1]}\int\limits_{[0,1]}I_D\left(x,y\right)d\#\left(y\right)dm\left(x\right)$$

כולם שונים זה מזה.

<u>פתרון:</u>

קודם כל יש להבין מהו מלבן מדיד במרחב המדובר. התשובה היא קבוצה מהצורה $R=E\times F$ כאשר $E\subseteq\left[0,1\right]$ מדידה לבג ו- $F\subseteq\left[0,1\right]$ כלשהי. למשל $R=\left[0,\frac{1}{4}\right]\times\left\{\frac{1}{\pi},\frac{1}{2},\frac{9}{10}\right\}$ הוא מלבן מדיד, ונפחו הוא $\left|R\right|=m\left(\left[0,\frac{1}{4}\right]\right)\cdot\#\left(\left\{\frac{1}{\pi},\frac{1}{2},\frac{9}{10}\right\}\right)=\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}$

א.עבור $\begin{matrix}n=0,1,2,3,\dots\\k=1,2,3\dots,2^n\end{matrix}$.נגדיר קטעים $I_{n,k}=\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$. נגדיר בנוסף $B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{2^n}I_{n,k}\times I_{n,k}$.

לכל n , B_n הוא איחוד בן מניה של מלבנים מדידים (R_σ), ופשוט לראות כי $D=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}B_n$ [ניתן לצייר ציור, זה נראה כמו פיקסלים]. כלומר D מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ ולכן מדידה.

ב. כדי לחשב את המידה $w\left(D\right)$ נזכר במידה החיצונית:

$$w^*\left(D\right)=\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|R_n\right|:D\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n,R_n\text{ are measurable rectangles}\right\}$$

יהי $\left\{R_n = E_n \times F_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי של D ע"י מלבנים מדידים, ז"א $D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \times F_n$. נזרוק מהאוסף $\left\{R_n\right\}$ את כל המלבנים המדידים עבורם $m\left(E_n\right)=0$. נותר לנו כיסוי של חלק **לא בן-מניה** של האלכסון, $D' \subseteq \bigcup_{\substack{n=1 \\ m(E_n)>0}}^{\infty} E_n \times F_n$. הסיבה לכך היא שקבוצת שיעורי ה-x של המלבנים שהוסרו היא ממידת לבג אפס, ולכן המלבנים שנותרו מכסים תת-קבוצה של האלכסון, ששיעורי ה-x שלה מהווים קבוצה ממידת לבג חיובית (ומכאן לא בת מניה) .

בהכרח ישנו מלבן $R_{n_0} = E_{n_0} \times F_{n_0}$ באוסף הנותר, עבורו F_{n_0} אינסופית (אחרת המלבנים שנותרו לא יכולים לכסות את 'D , שקבוצת שיעורי ה-y שלה אינה בת מניה). עבור אותו המלבן $\left|R_{n_0}\right| = m\left(E_{n_0}\right) \cdot \#\left(F_{n_0}\right) = \infty$ ומכאן $\sum_{n=1}^{\infty}\left|R_n\right| \geq \left|R_{n_0}\right| = \infty$. כלומר, כל האיברים בקבוצה $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|R_n\right| : D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, R_n \text{ are measurable rectangles}\right\}$ הם ∞ ולכן $w^*\left(D\right)$ שהוא ה-sup שלה שווה אינסוף. מכאן ניתן לחשב את האינטגרל הראשון (הכפול):

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} I_D\left(x,y\right) dw = w\left(D\right) = \infty$$

לגבי האינטגרלים הנשנים:

- לכל $y \in \left[0,1\right]$ קבוע, $\int_{[0,1]} I_D\left(x,y\right) dm\left(x\right) = 0$ (כי $I_D = 0$ כב"מ dm) ולכן $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D\left(x,y\right) dm\left(x\right) d\#\left(y\right) = 0$.
- לכל $x \in \left[0,1\right]$ קבוע

$$\int_{[0,1]} I_D\left(x,y\right) d\#\left(y\right) = \int_{\{x\}} I_D\left(x,y\right) d\#\left(y\right) + \int_{[0,1]\setminus\{x\}} I_D\left(x,y\right) d\#\left(y\right) = \int_{\{x\}} 1 \cdot d\#\left(y\right) + 0 = \#\left(\left\{1\right\}\right) = 1$$

ולכן $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} I_D\left(x,y\right) d\#\left(y\right) d\#\left(x\right) = \int_{[0,1]} 1 \cdot dm\left(x\right) = 1$.

פונקציית קנטור

<u>תזכורת:</u> קבוצת קנטור C מוגדרת ע"י חיתוך הקבוצות $\left\{C_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, וכפי שראינו בתרגול השני ניתן לרשום גם $C = \left\{x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots_3 : \forall i \ x_i \in \left\{0,2\right\}\right\}$

נגדיר פונקציה $f : \left[0,1\right] \to \left[0,1\right]$ באופן הבא :

ראשית, נגדיר את הפונקציה על קבוצת קנטור. לכל $x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots \in C$ נחלק את הספרות הטרינאריות שלו ב-2 ונפרש את התוצאה כמספר בינארי. במילים אחרות התהליך הוא כנ"ל:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}=f\left(x\right)$$

ואם $x\notin C$, אזי x נמצא באחד מהקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$ שהסרנו בבניית קבוצת קנטור. (כמו למשל $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$) במקרה זה ניתן ל- x את הערך של פונקציית קנטור בקצות הקטע הזה , שבוודאי נמצאים בקבוצת קנטור (אין חשיבות לבחירת הקצה, שכן ערך הפונקציה זהה בשניהם).

לפונקציה f קוראים פונקציית קנטור, ויש לה תכונות ייחודיות ההופכות אותה לדוגמה נגדית חשובה.

<u>דוגמאות:</u>

$0=0.000\ldots_3\in C$ ולכן $f\left(x\right)=0.000\ldots_2=0$

$1=0.222\ldots_3\in C$ ולכן $f\left(1\right)=0.111\ldots_2=1$

$\frac{1}{3}=0.1_3=0.0222\ldots_3\in C$ ולכן $f\left(\frac{1}{3}\right)=0.0111\ldots_2=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}=0.2_3\in C$ ולכן $f\left(\frac{2}{3}\right)=0.1_2=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=0.111\ldots_3\notin C$ הוסר יחד עם הקטע $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ולכן $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

נוכיח מספר תכונות:

א. תמונת קבוצת קנטור תחת פונקציית קנטור היא כל הקטע $\left[0,1\right]$

ב. פונקציית קנטור היא מונוטונית עולה חלש בקטע $\left[0,1\right]$

ג. פונקציית קנטור היא רציפה.

ד. פונקציית קנטור גזירה כב"מ בקטע $\left[0,1\right]$ עם נגזרת 0 (לפי מידת לבג m)

<u>הוכחה:</u>

א. יש להראות $f\left[C\right]=\left[0,1\right]$. נראה הכלה דו-כיוונית.

$\subseteq$: יהי $a\in f\left[C\right]$. קיים $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\in C$ עבורו $a=f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}$. הספרות $\left\{x_n\right\}$ כזכור הן 0 או 2, ולכן:

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0/2}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

ולכן $a=f(x)\in[0,1]$

$\supseteq$: יהי $a\in[0,1]$ אזי יש לו פיתוח בינארי $a=0.a_1a_2a_3\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ שבו כל הספרות הן 0 או 1. נכפיל את הספרות פי 2 ונפרש את התוצאה כמספר טרינארי $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}$.

זהו מספר בקבוצת קנטור ומתקיים $f(x)=a$ ולכן $a\in f[C]$.

ב. יש להראות כי אם $x,y\in[0,1]$ מקיימים $x<y$ אזי $f(x)\le f(y)$.

נוכיח תחילה את המקרה שבו $x,y\in C$: ובכן $x<y$ ולכן יהי N מיקום הספרה הטרינארית הראשונה שבה x ו- y לא מתלכדים. (כלומר $x_N=0<2=y_N$, ולכל $n<N$, $x_n=y_n$). אם כך

$$f(y)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}=\sum_{n=1}^{N-1}0+\frac{y_N/2-x_N/2}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}=$$

$$=\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}\ge\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{0-1}{2^n}=\frac{1}{2^N}-\frac{1}{2^N}=0$$

ובמקרה שבו $x<y\in[0,1]$ כלשהם נמצא מספרים $x',y'\in C$ המקיימים $x'\le x$ ו- $y'\ge y$ וגם $f(x')=f(x)$ ו- $f(y')=f(y)$. וע"פ המקרה הקודם $f(x')\le f(y')$ ולכן גם $f(x)\le f(y)$ וסיימנו.

ג. f מונוטונית עולה, וידוע מאינפי' שנקודות אי הרציפות של פונקציות מונוטוניות הן מסוג קפיצה בלבד. אבל קפיצה לא תתכן כי אז לא יתקיים $f[C]=[0,1]$.

ד. נוכיח ש- $f'(x)=0$ לכל $x\in C^c=[0,1]\setminus C$. ובכן יהי $x\in[0,1]\setminus C$ אזי x נמצא באחד הקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$, שהסרנו בבניית קבוצת קנטור, ושם f קבועה. אם ניקח h קטן דיו, יתקיים $f(x+h)=f(x)$ ולכן $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\xrightarrow{h\to0}0=f'(x)$.

הקבוצה שבה לא הראינו גזירות היא קבוצת קנטור, שמידתה (לבג) אפס ולכן כב"מ.