תורת הגרפים - הרצאה 9

1 בינואר 2012

הפולינום הכרומטי - המשך

למה

לכל גרף G (פשוט סופי), צלע e ב-G, מתקיים:

$$f_G(x) = f_{G\setminus e}(x) - f_{G/e}(x)$$

תרגיל

1. הוכח:

$$\deg\ f_G(x) = n$$

כאשר n סדר הגרף.

2. $f_G(x)$ פול' מתוקן.
3. $f_G(0) = 0$.

משפט (סטנלי, 1973)

לכל גרף פשוט סופי G, מס' ההכוונות הלא מעגליות של G שווה ל-$|f_G(-1)|$.

דוגמה

פולינום הצביעה הוא $f_G(x) = x(x-1)^3$.
מס' ההכוונות הלא מעגליות של הגרף הוא $8 = \left|(-1)(-2)^3\right| = |f_G(-1)|$.

מסקנה ממשפט סטנלי

$$|f_{C_n}(-1)| = 2^n - 2$$

תרגיל

חשב $f_{C_n}(x)$.

הוכחת משפט סטנלי

נוכיח משפט חזק יותר:
יהי G גרף פשוט מסדר n. נסמן O_G מס' ההכוונות הלא מעגליות של G, אזי:

$$O_G = (-1)^n f_G(-1)$$

נוכיח באינדוקציה על מספר הצלעות m.
אם $m=0$ הגרף ריק N_m.

$$f_{N_m}(x)=x^n$$

ולכן

$$(-1)^n\cdot f_{N_m}(-1)=(-1)^n\cdot(-1)^n=1$$

ואכן $O_{N_m}=1$.
נניח נכונות עבור כל גרף עם פחות מm צלעות.
יהי G גרף מסדר n עם m צלעות. תהא e צלע בG.
לפי הנחת האינדוקציה:

$$O_{G\backslash e}=(-1)^n f_{G\backslash e}(-1)$$

כמו כן:

$$O_{G/e}=(-1)^{n-1} f_{G/e}(-1)$$

נתבונן ב$G\backslash e$. נסמן $e=(u,v)$.
נחלק את ההכוונות של $G\backslash e$ לשני סוגים.
סוג א' - אין מסילה מכוונת מu לv ואין מסילה מכוונת מv לu.
סוג ב' - יש מסילה מכוונת מu לv או מסילה מכוונת מv לu.
נסמן מס' ההכוונות של $G\backslash e$ מסוג א' s ומס' ההכוונות מסוג ב' t.
מתקיים $s+t=O_{G\backslash e}$.
נתבונן בהכוונות לא מעגליות של G/e.
עובדה: כל הכוונה לא מעגלית של $G\backslash e$ מסוג א' מתאימה להכוונה לא מעגלית של G/e ולהפך, כלומר יש התאמה חח"ע ועל.
מסקנה - $O_{G/e}=s$.
נתבונן בהכוונות לא מעגליות של G.
כל הכוונה כזו ניתן לקבל ע"י הכוונה לא מעגלית של $G\backslash e$ ואח"כ הכוונת e.
אם ההכוונה מסוג א', שתי אפשרויות ההכוונה של e אפשריות - מu לv או מv לu.
אם ההכוונה מסוג ב', יש אפשרות אחת בלבד להכוונת e ללא יצירת מעגל.
לכן:

$$O_G=2s+t$$

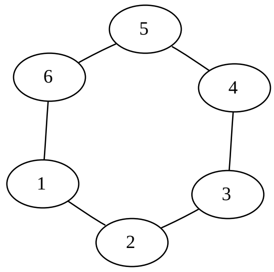
סה"כ נקבל:

$$\begin{aligned}
O_G &= 2s+t\\
&= (s+t)+s\\
&= O_{G\backslash e}+O_{G/e}\\
&= (-1)^n f_{G\backslash e}(-1)+(-1)^{n-1} f_{G/e}(-1)\\
&= (-1)^n\left(f_{G\backslash e}(-1)-f_{G/e}(-1)\right)\\
&= (-1)^n f_G(-1)
\end{aligned}$$

שידוכים

הגדרה

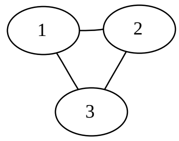
יהי $G=(V,E)$ גרף (ניתן להניח פשוט וסופי).
שידוך בG הוא התאמה חח"ע ועל בין שתי קבוצות זרות של קדקדים A וB כך שבין כל שני קדקדים מתאימים יש צלע.
שידוך הוא מושלם אם $A\cup B=V$.
דוגמה:



בגרף הזה יש שידוך מושלם:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 5\} \\ B &= \{2, 4, 6\} \\ & (1, 2), (3, 4), (5, 6) \end{aligned}$$

אך בגרף:



אין שידוך מושלם, אך יש שידוך $(1, 2)$.

שאלות

האם בגרף נתון יש שידוך מושלם?
מצא שידוך מושלם בגרף נתון.

דוגמה

30 תלמידים מגיעים לחטה"ב מבתי ספר שונים.
המורים רוצה להושיב שניים שניים כך שאין 2 מאותו בי"ס יחדיו.
מציירים גרף של 30 קדקדים, וצלע אם הם לא מאותו בי"ס, ומחפשים שידוך מושלם.
יש פתרון ידוע רק עבור גרפים דו צדדיים.

הגדרה

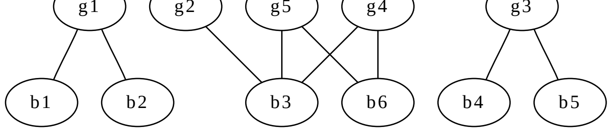
יהי G גרף דו צדדי שצדדיו V^1 וV^2.
שידוך מלא מV^1 לV^2 היא התאמה חח"ע מV^1 לV^2 כך שבין כל 2 קדקדים מתאימים יש צלע בגרף.

הערה

אם $\left|V^1\right| = \left|V^2\right|$ אז השידוך המלא הוא מושלם.

שאלה

האם בגרף דו"צ נתון יש שידוך מושלם?
לדוגמה:



בגרף זה אין שידוך מלא כי לת"ק $\{g_2, g_4, g_5\}$ יש רק שני שכנים $\{b_3, b_6\}$.

הגדרה

יהי $G=(V,E)$ גרף. $A\subseteq V$.
קב' השכנים של A היא:

$$N_G(A)=\{u\in V\mid \exists v\in A:\ (u,v)\in E\}$$

כלומר כל הקדקדים שיש להם שכן שהוא קדקד בA.

משפט הול

יהי G גרף דו"צ שצדדיו V^1,V^2.
יש שידוך מלא מV^1 לV^2 $\Longleftrightarrow$ לכל $A\subseteq V^1$ מתקיים $|N_G(A)|\geq |A|$.

הוכחה

צד קל:
אם יש שידוך מלא מV^1 לV^2 - $f:\ V^1\to V^2$ חח"ע כך שלכל $v\in V^1$, $(v,f(v))\in E$.
אז כיוון שf חח"ע אז לכל $A\subseteq V^1$, $|f(A)|=|A|$.
אבל f שידוך לכן לכל $v\in V^1$, $(v,f(v))\in E$ ולכן $f(v)\in N_G(\{v\})$ ולכן $f(A)\subseteq N_G(A)$, לכן $|A|=|f(A)|\leq |N_G(A)|$.
צד שני:
נניח שמתקיים תנאי הול - לכל $A\subseteq V^1$ מתקיים $|A|\leq |N_G(A)|$.
צ"ל שיש שידוך מלא מV^1 לV^2.
נוכיח באינד' על גודל V^1.
נסמן $m=\left|V^1\right|$.
אם $m=1$ אז V^1 מכיל קדקד אחד בלבד.
לפי תנאי הול

$$\deg v=|N_G(v)|\geq |\{v\}|=1$$

יש לv לפחות שכן אחד, נשדך לו את אחד משכניו וסיימנו.
נניח נכונות עבור כל גרף דו צדדי עם $\left|V^1\right|<m$.
יהי G גרף דו"צ עם $\left|V^1\right|=m$ המקיים את תנאי הול.
מקרה א':
לכל ת"ק $A\subseteq V^1$ מגודל $|A|=k<m$ מתקיים:

$$|N_G(A)|>|A|$$

במקרה זה יהי $v\in V^1$. יש לv לפחות שני שכנים.
נתאים לv את אחד משכניו, u.
נשמיט את v וu מהגרף.
ואז בגרף הדו"צ $G^{'}=G\backslash\{u,v\}$ מתקיים: לכל $A\subseteq V^1\backslash\{v\}$:

$$N_{G'}(A)=N_G(A)\backslash u$$

ולכן

$$\begin{aligned}|N_{G'}(A)| &= |N_G(A)\backslash\{u\}|\\ &\geq |N_G(A)|-1>|A|-1\end{aligned}$$

ולכן

$$|N_{G'}(A)|\geq A$$

לכן תנאי הול מתקיים ולפי הנחת האינדוקציה יש שידוך מלא מ$V^1\backslash\{v\}$ ל$V^2\backslash\{u\}$. נצרף את (v,u) לשידוך זה ונקבל שידוך מלא לG.
מקרה ב':
קיימת קבוצה $A\subseteq V^1$ מגודל $|A|=k<m$ עבורה מתקיים:

$$|N_G(A)|=|A|$$

יהי G^1 תת הגרף של G המושרה מ$A\cup N_G(A)$.
יהי G^2 תת הגרף של G המושרה מ$\left(V^1\backslash A\right)\cup\left(V^2\backslash N_G(A)\right)$.
כדי להוכיח שיש שידוך מלא מV^1 לV^2 מ"ל שיש שידוך מלא מA ל$N_G(A)$ בG^1 ומ$V^1\backslash A$ ל$V^2\backslash N_G(A)$ בG^2.
נשים לב - לפי תנאי מקרה ב', $|A|<m$ וכן $V^1\backslash A<m$ (כיוון שA לא ריקה). לכן, מספיק להוכיח שתנאי הול מתקיים בG^1 ובG^2.
עבור G^1:
לכל $B\subseteq A$:

$$N_{G^1}(B)=N_G(B)$$

לכן, לפי קיום תנאי הול בG:

$$\forall B\subseteq A\quad |N_{G^1}(B)|=|N_G(B)|\geq|B|$$

לכן תנאי הול מתקיים בG^1.
עבור G^2:
לכל $B\subseteq V^1\backslash A$ מתקיים:

$$|N_G(B\cup A)|\geq|B\cup A|=|B|+|A|$$

(כי תנאי הול מתקיים בG וA ו-B זרות).
וכן:

$$N_{G^2}(B)=N_G(B\cup A)\backslash N_G(A)$$

לכן:

$$\begin{aligned}|N_{G^2}(B)| &= |N_G(B\cup A)\backslash N_G(A)|\\ &\geq |N_G(B\cup A)|-|N_G(A)|\\ &= |N_G(B\cup A)|-|A|\\ &\geq |B|+|A|-|A|=|B|\end{aligned}$$

ולכן מתקיים תנאי הול בG^2.
מש"ל.