תרגול ד

(יום שלישי עוד שבועיים 25.5
בשעת מחלקה 16:00)

צריך לקבוע סופית מעל עלי..

המשך אינטגרל מסוים

תרגיל:

חשבו את האינטגרל המסויים

$$\int_0^3 e^{x^2}\cdot 2x\,dx$$

פתרון: נמצא ראשית את הפונקציה הקדומה:

$$\int e^{x^2}2x = \int e^t dt = e^t + c$$

$$t = x^2$$
$$dt = 2x\,dx$$

$$\boxed{= e^{x^2} + c = F(x)}$$

כעת, נשתמש בנוסחת ניוטון-לייבניץ כדי לחשב את האינטגרל המסוים.

$$\int_0^3 e^{x^2}2x\,dx = F(3) - F(0)$$

$$= e^9 + c - 1 - c \boxed{= e^9 - 1}$$

אפשר גם לעשות ישירות!

$$\int_0^3 e^{x^2} 2x\,dx = \int_0^9 e^t\,dt = e^t\Big]_0^9 = e^9 - 1$$

$t = x^2$ $\quad x=0 \Rightarrow t=0$

$dt = 2x\,dx$ $\quad x=3 \Rightarrow t=9$

תכונות של אינטגרל מסוים:

משפט: אם $f(x) \le g(x)$ בקטע $[a,b]$, אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

תרגיל: הוכיחו כי:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \le 2e^2$$

נסמן $f(x) = e^{x^2-x}$ ונמצא מקסימום ומינימום גלובליים בקטע $[0,2]$ לפונקציה f.

(נגזור את $f(x)$, ונשווה ל-0 ונמצא ע"י חשבון (מה שהתבקש) וקצוות הקטע)

ונגלה כי $\max_{x\in[0,2]} f(x) = e^2$; $\min_{x\in[0,2]} f(x) = e^{-1/4}$

על כן מתקיים $e^{-1/4} \le f(x) \le e^2$ לכל $0 \le x \le 2$

נשתמש במשפט הקודם ונקבל

$$\int_0^2 e^{-1/4}\,dx \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \le \int_0^2 e^2\,dx$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} = 2e^{-1/4} \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \le e^2\int_0^2 1 = 2e^2$$

<u>מסקנה מהמשפט הקודם</u>:

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אזי

ונניח כי מתקיים $m \le f(x) \le M$ לכל $a \le x \le b$

אזי: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

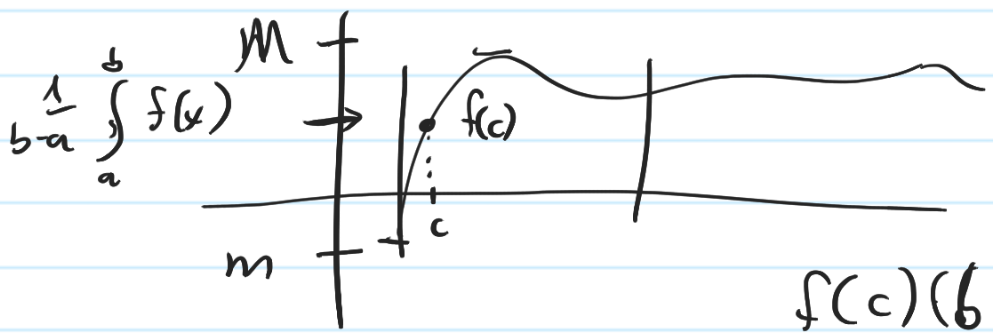
ומכאן

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

ממשפט ערך הביניים של קושי קיים ע' $c\in[a,b]$ ק

ש $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. לערך זה קוראים הערך הממוצע

של $f(x)$ בקטע $[a,b]$



$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

תרגיל: חשבו את הערך הממוצע של

$\sin x \cdot \sin(x+\theta)$ בקטע $[0,2\pi]$.

פתרון: נעזר בזהות $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(-\theta) - \cos(2x+\theta)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta - \cos(2x+\theta)\, dx$$

$$\frac{2\pi}{4\pi}\cos\theta - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x+\theta)\, dx}_{=0}$$

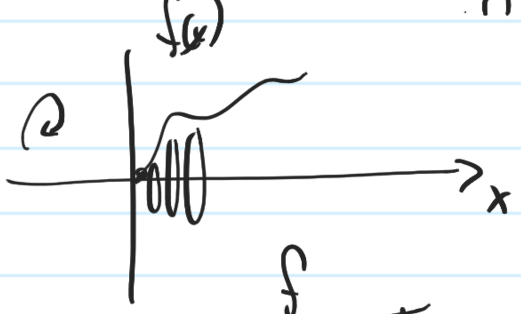
בגלל המחזוריות של cos במחזור שלם.

עלכן בסה"כ הערך הממוצע הוא $\frac{1}{2}\cos\theta$.

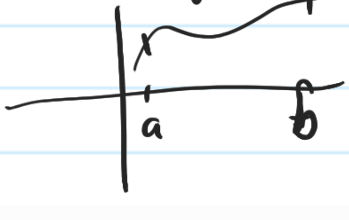
שימושים לאינטגרל מסוים.

1. חישוב שטח מתחת לגרף פונקציה.

2. חישוב נפח של גוף סיבוב.



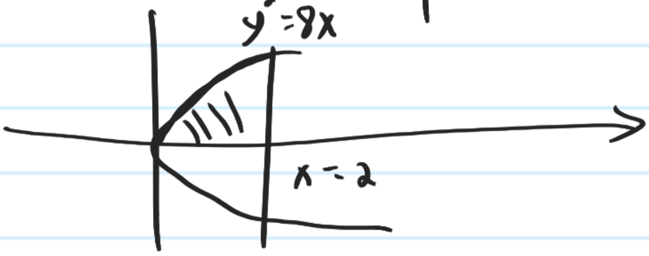
$$\Rightarrow \quad V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$



3. חישוב אורך עקומה

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

תרגילים: חשבו את הנפח הנוצר ע״י סיבוב השטח
ברביע הראשון הכלוא בין $y^2=8x$ והישר $x=2$.



$$f(x)=\sqrt{8x}$$

$$V=\int_0^2 \pi(8x)\,dx = 4\pi x^2\Big|_0^2 = \boxed{16\pi}$$

תרגיל: חשבו את אורך העקום $y=x^{3/2}$
בין $x=0$ ל $x=5$.

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}$$

$$f(x)=x^{3/2}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}$$

ונקבל:

$$L=\int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=$$

$$t=1+\frac{9}{4}x \qquad x=0 \Rightarrow t=1$$

$$dt=\frac{9}{4}dx \qquad x=5 \Rightarrow t=\frac{49}{4}$$

$$=\frac{4}{9}\int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{t}\,dt = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^{49/4} = \frac{8}{27}\left(\frac{343}{8}-1\right)$$

אינטגרלים לא אמיתיים.

<u>הגדרה:</u> אינטגרל מסוים יקרא <u>לא אמיתי מסוג</u> <u>ראשון</u> אם אחד לפחות מגבולות האינטגרציה שלו הוא אינסופי.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ , \ \int_{a}^{\infty} \ , \ \int_{-\infty}^{a}$$

<u>תכונות:</u>

1. לכל נק' $c \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

והצד השמאלי מוגדר ומתכנס אם ורק אם <u>כל אחד</u> מהצדדים בצד הימני מוגדר ומתכנס. (מספיק שאחד יתבדר כדי שהצד השמאלי לא יתכנס).

2. $$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

(בדומה $-\infty$)

3. $(a>0)$ $\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ מתכנס $\iff$ $\alpha > 1$.

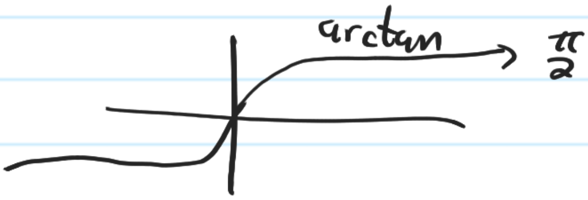
<u>דוגמאות:</u>

$$\int_{1}^{\infty} \cos x\, dx = \lim_{b \to \infty} \sin x \Big]_{1}^{b} = \sin x \Big]_{1}^{\infty}$$

הגבול $\lim_{b \to \infty} \sin b$ לא קיים ולכן האינטגרל מתבדר.

תרגיל חשבו

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan}{1+x^2} =$$

$t = \arctan x \qquad x \to \infty \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad x \to -\infty \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

שימו לב שהיה ראוי לפרק ורק אז להשתמש
בהצבה. [illegible] $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} t + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t$ אינן מתכנסים.

תרגיל: חשבו

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x}\,dx$$

נפרק לשני אינטגרלים לא אמיתיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-x}\,dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x}\,dx$$

נחשב באופן כללי את הפונקציה הקדומה:

$$\int x e^{-x}\,dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = \underline{-xe^{-x} - e^{-x} + c} = F(x)$$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$u' = e^{-x} \quad u = -e^{-x}$

נחשב:

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{-x}\,dx = F(0) - \lim_{b \to -\infty} F(b) = -1 - (\infty)$$

לא קיים.

ואין צורך להמשיך. האינטגרל לא מתכנס.