פתרון תרגיל בית 5

1. חשבו את האינטגרל הקווי הבא בעזרת משפט גרין ובדקו את תשובתכם על ידי חישוב ישיר.

$\oint_C y^2dx + x^2dy$ כאשר C היא הריבוע שקדקודיו הם $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ ומגמתו הפוכה לכיוון השעון.

פתרון: נחלק את העקומה לארבע עקומות:

$$(0,0)\to(1,0):\ t\to(t,0)\ \text{ - }\ \int_0^1 0^2\,dt + t^2(0)\,dt = 0$$

$$(1,0)\to(1,1):\ t\to(1,t)\ \text{ - }\ \int_0^1 t^2(0)\,dt + 1dt = 1$$

$$(1,1)\to(0,1):\ t\to(1-t,1)\ \text{ - }\ \int_0^1 1(-dt) + (1-t)^2(0)\,dt = -1$$

$$(0,1)\to(0,0):\ t\to(0,1-t)\ \text{ - }\ \int_0^1 (1-t)(0)\,dt = 0$$

לכן בסה"כ נקבל כי $\oint_C y^2dx + x^2dy = 0$. עפ"י משפט גרין נקבל

$$\oint_C y^2dx + x^2dy = \int_0^1\int_0^1 (2x-2y)\,dxdy = \int_0^1 \left(x^2-2yx\right)\Big|_0^1 dy = \int_0^1 (1-2y)\,dy = 0\ .$$

2. חשבו את האינטגרל הבא בעזרת משפט גרין, הניחו שמגמת העקומה הפוכה לכיוון השעון.

$$\oint_C \left(x^2-y\right)dx + xdy$$

כאשר C היא המעגל $x^2+y^2=4$.

פתרון: עפ"י משפט גרין נקבל :

$$\oint_C \left(x^2-y\right)dx + xdy = \iint 1-(-1)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 2rdrd\theta = \int_0^{2\pi} 4d\theta = 8\pi.$$

3. חשבו את האינטגרל הבא בעזרת משפט גרין, הניחו שמגמת העקומה הפוכה לכיוון השעון.

$$\oint_C x^2ydx + \left(y+xy^2\right)dy$$

כאשר C היא שפת התחום בין $y=x^2$ ל $x=y^2$.

פתרון:

$$\oint_C x^2 y dx + \left(y + xy^2\right) dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(y^2 - x^2\right) dy dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y^3 - x^2 y\right)_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{1}{3} x^6 - x^4\right)\right) dx = \left(\frac{2}{5}\frac{1}{3} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \left(\frac{1}{21} x^7 - \frac{1}{5} x^5\right)\right)_0^1 = 0$$

4. חשבו את $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F}(x, y) = \left(e^{-x} + 3y\right)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ו C היא שפתו של התחום R הכלוא בין המעגלים $x^2 + y^2 = 16$ ו $x^2 - 2x + y^2 = 3$.

פתרון: עפ"י משפט גרין נקבל

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \left(e^{-x} + 3y\right) dx + x dy = \iint_R (1 - 3) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^4 -2r dr - \int_0^{2\pi} \int_0^2 -2r dr = -24\pi$$