אינפי 4 : תרגול 1

1 מרץ 2016

<u>הגדרה</u>: **עקומה** ב־$\mathbb{R}^n$ היא פונקציה רציפה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ($a < b$) .

<u>הערה</u>: לתמונה של עקומה γ גם נקרא עקומה, לכן יש להבדיל בין עקומה, בהקשר של פונקציה, לבין עקומה המוגדרת כקבוצת נקודות במרחב שהיא התמונה של פונקציה רציפה המוגדרת על קטע $[a,b]$ מסוים.

<u>הגדרה</u>: אם Γ היא עקומה ב־$\mathbb{R}^n$ שהיא התמונה של $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ אז נאמר ש־γ נותנת פרמטריזציה ל־Γ.

<u>לדוגמא</u>:

1. קטע בין שתי נקודות $a, b \in \mathbb{R}^n$:

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb, t \in [0,1]$$

2. מעגל קנוני עם רדיוס 1:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

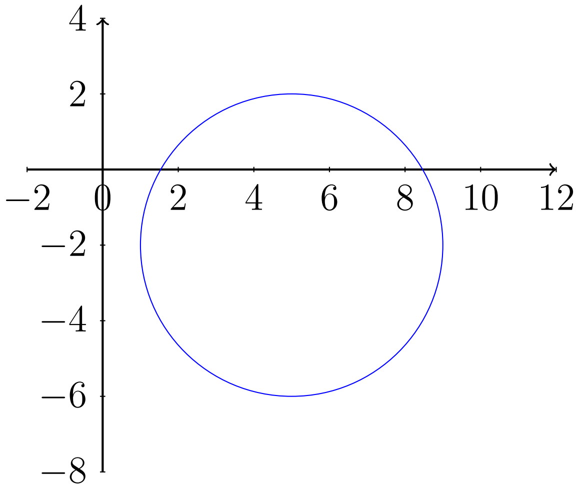
באופן כללי, מעגל עם רדיוס R שמרכזו בנקודה (a,b):

$$\gamma(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t), t \in [0, 2\pi].$$

<u>הערה</u>: אם נשנה את תחום ההגדרה של המשתנה t בדוגמא האחרונה להיות בין $[0, 4\pi]$ נקבל אותו מעגל אך γ תעבור בכל נקודה פעמיים. לכן כבר ראינו דוגמא לעקומה עם שתי פרמטריזציות שונות.

3. אליפסה עם אורכי צירים a ו־ b

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, 2\pi].$$



איור של מעגל עם מרכז ב־$(5,-2)$ ורדיוס 4.

4. אם במקום R בהגדרה של מעגל קנוני נציב את המשתנה t, כלומר

$$t \to (t\cos t, t\sin t), t \in [0, L]$$

נקבל ספירלה.

עבור עקומה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ניתן את ההגדרות הבאות:

הגדרות:

א. הוקטור $\gamma'(t)$ נקרא **הוקטור המשיק** לעקומה γ בנקודה $\gamma(t)$.

ב. העקומה γ נקראת **פשוטה** אם היא חח"ע פרט אולי לקצוות (כלומר מותר ש־$\gamma(a)=\gamma(b)$). פירוש הדבר הוא ש־ γ לא חותכת את עצמה.

ג. העקומה γ נקראת **סגורה** אם $\gamma(a)=\gamma(b)$.

ד. העקומה γ נקראת **רגולרית** אם $\gamma'(t) \neq 0$.

ה. העקומה γ נקראת **חלקה** אם היא גזירה ברציפות ורגולרית.

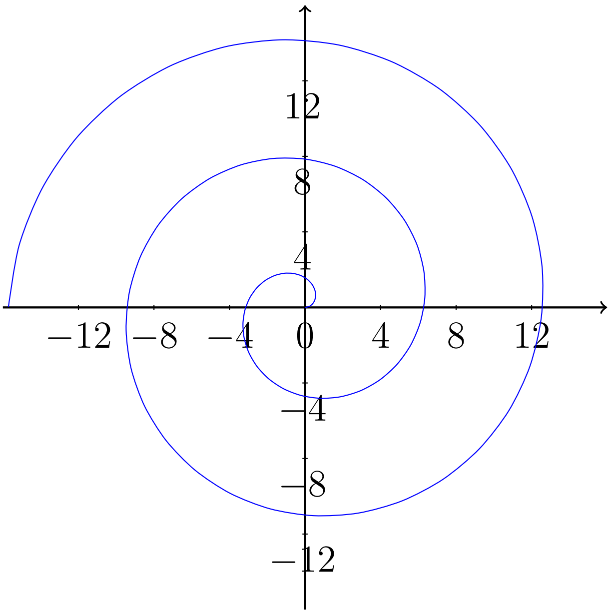
ו. העקומה γ נקראת **חלקה למקוטעין** (ובאופן דומה גזירה ברציפות למקוטעין) אם היא חלקה פרט למספר סופי של נקודות.

ז. נגדיר **אורך של עקומה** להיות

$$L(\gamma) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|\right\}$$

כאשר הסופרמום רץ על כל $n \in \mathbb{N}$ ועל כל חלוקה של הקטע $[a,b]$. למעשה,

זהו הסופרמום של אורכי העקומות שמקרבות את γ המורכבות מקטעים ישרים (עקומות פוליגונליות).



איור של הספירלה $t \to (t\cos t, t\sin t), t \in [0, 5\pi]$

עקומה שלה אורך סופי נקראת **עקומה בעלת אורך**. אם העקומה שלנו חלקה, אפשר לחשב את אורכה לפי הנוסחא

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

<u>תרגיל</u>: חשבו את אורך העקומה $\gamma(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$ כאשר $t \in [0, 1]$.

<u>פתרון</u>: קל לבדוק שהעקומה γ חלקה. וקטור הנגזרות הוא

$$\gamma'(t) = \left(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}\right)$$

ולכן

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}.$$

לכן אורך העקומה יהיה

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left(e^t + e^{-t}\right) dt = e^t - e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=1} = e - e^{-1}.$$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שהיקף האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ נתון לפי

$$s=4aE\left(\frac{1}{a}(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}},\frac{\pi}{2}\right),$$

כאשר $E(k,\phi)=\int_0^{\phi}(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}dt$.

<u>פתרון</u>: נשתמש בפרמטריזציה

$$x=a\sin t,y=b\cos t,t\in[-\pi,\pi]$$

(בדר"כ היינו משתמשים בפרמטריזציה $x=a\cos t,y=b\sin t$, אבל כאן יהיה יותר נח להשתמש בפרמטריזציה שהגדרנו). מנוסחת האורך נקבל

$$L=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(a\sin' t)^2+(b\cos' t)^2}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t-(a^2-b^2)\sin^2 t}dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}dt=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}dt$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ש־$\sin^2 t$ היא פונקציה זוגית לכן ניתן להחליף את קטע האינטגרציה מ־$[-\pi,\pi]$ ל־$[0,\pi]$ ולהכפיל בשתיים. כיוון שהפונקציה $\sin^2 t$ מחזורית π ניתן להחליף את קטע האינטגרציה מ־$[0,\pi]$ ל־$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ושוב כיוון ש־$\sin^2 t$ זוגית ניתן להחליף קטע זה ל־$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ולהכפיל בשתיים. לכן

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}dt$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\left(a^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\sin^2 t}dt.$$

הוכחנו את הטענה.

<u>תרגיל</u>: נגדיר $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

ונגדיר את העקומה $\gamma(t)=(t,f(t))$ כאשר $t\in[0,1]$. האם העקומה γ היא בעלת אורך?

<u>פתרון</u>: לא. נשים לב שעבור $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k = 2m, \\ -\frac{1}{k}, k = 2m+1, \end{cases}$$

לכן נקבל

$$\left|\gamma\left(\frac{1}{k}\right) - \gamma\left(\frac{1}{k+1}\right)\right| \geq \left|f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right| \geq \frac{1}{k}.$$

אם נתבונן בחלוקות $T_n : 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < ... < \frac{1}{2} < 1$ אז אורך הקו הפוליגונלי המתאים לחלוקה זו יהיה גדול או שווה מהסכום $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. כאשר $n \to \infty$ הסכום האחרון גם שואף לאינסוף ולכן העקומה אינה בעלת אורך.

<u>הגדרה</u>: העקומות $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ו־$\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ נקראות שקולות אם קיימת פונקציה $\phi : [a, b] \to [c, d]$ שגזירה ברציפות ומקיימת

(i) $\phi'(t) > 0$ לכל $t \in [a, b]$

(ii) $\phi([a, b]) = [c, d]$

כך ש־$\alpha = \beta \circ \phi$.

<u>הערה</u>: עקומות שקולות מתארות אותה עקומה במרחב, בפרט יש להן אותו אורך. כמו כן, אם α ו־β שקולות אז α היא עקומה חלקה אם ורק אם β היא עקומה חלקה.

<u>הגדרה</u>: העקומה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ נקראת בעלת מהירות יחידה אם לכל $t \in [a, b]$ מתקיים $|\gamma'(t)| = 1$.

<u>משפט</u>: אם $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ היא עקומה חלקה אז קיימת עקומה $\beta : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ בעלת מהירות יחידה השקולה ל־γ. אם $\beta(s) = \gamma(t(s))$ אז הקשר בין t ל־s נתון לפי

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau, t \in [a, b]$$

<u>תרגיל</u>: נתונה הפונקציה $f(u) = \frac{1}{3}(2 + u^2)^{\frac{3}{2}}$ בקטע $[0, 3]$. מצאו עקומה בעלת מהירות יחידה הנותנת פרמטריזציה לגרף של f.

<u>הדרכה</u>: השתמשו בהחלפת המשתנים $t = x - \frac{1}{x}$ כדי לחלץ את t כפונקציה של s.

<u>פתרון</u>: עלינו למצוא עקומה β השקולה לעקומה $\gamma(t) = (t, f(t))$, כאשר $t \in [0,3]$, בעלת מהירות יחידה. לפי המשפט שניסחנו, הפרמטר s שנותן את הפרמטריזציה בעלת מהירות יחידה נתון לפי

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{1 + (f'(\tau))^2} d\tau$$

$$= \int_0^t \sqrt{1 + \left(\tau(2+\tau^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{1 + \tau^2(2+\tau^2)} d\tau$$

$$= \int_0^t \sqrt{1 + 2\tau^2 + \tau^4} d\tau = \int_0^t (1+\tau^2) d\tau = t + \frac{t^3}{3}.$$

לאחר פעולות אלגבריות פשוטות נקבל את המשוואה $t^3 + 3t - 3s = 0$. כיוון שהפונקציה $t \to t^3 + 3t$ היא מונוטונית עולה ממש נובע שלכל s קבוע יש פתרון יחיד עבור t למשוואה שקיבלנו. כעת נשתמש בהחלפת המשתנים $t = x - \frac{1}{x}$ ונקבל

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x - \frac{3}{x} - 3s = 0$$

וזה שקול ל־

$$x^6 - 3sx^3 - 1 = 0.$$

קיבלנו משוואה ריבועית עבור x^3 ולכן

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3s \pm \sqrt{9s^2+4}\right)}$$

כיוון שיש פתרון יחיד עבור t ניתן לקחת את סימן הפלוס בפתרון עבור x. לכן נקבל

$$t = x - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3s + \sqrt{9s^2+4}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3s - \sqrt{9s^2+4}\right)}$$

לכן העקומה β נתונה לפי

$$\beta_1(s) = t(s) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3s + \sqrt{9s^2+4}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3s - \sqrt{9s^2+4}\right)},$$

$$\beta_2(s) = \frac{1}{3}(2 + t(s)^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\left(3s+\sqrt{9s^2+4}\right)\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{2}\left(3s-\sqrt{9s^2+4}\right)\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

כמו כן, כיוון ש־$s = t + \frac{t^3}{3}$ ו־$t \in [0,3]$ נובע ש־$s \in [0,12]$.

<u>הגדרה</u>: הצגה פולרית של עקומה במישור היא משוואה מהצורה

$$r = \rho(\theta), \alpha < \theta < \beta$$

כאשר θ היא הזווית הנמדדת ביחס לכיוון החיובי של ציר ה־x ו־r הוא הרדיוס המתאים לזווית θ לפי הפונקציה ρ.

<u>הערה</u>: ההצגה הקרטזית של העקומה $r = \rho(\theta), \alpha < \theta < \beta$ היא

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta), \alpha < \theta < \beta.$$

<u>משפט</u>: אם γ היא עקומה בעלת אורך (בפרט חלקה) עם ההצגה הפולרית $r = \rho(\theta), \alpha < \theta < \beta$ אז

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta$$

<u>תרגיל</u>: נתונה העקומה

$$\gamma(t) = \left(\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}, \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right), t \geq 0$$

(שימו לב שכאן t שייך לקרן אינסופית ולא לקטע סגור), בעזרת החלפת המשתנים $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ובעזרת מעבר לקאורדינטות פולריות, חשבו את אורך עקומה זו.

<u>פתרון</u>: אם t שייך לקרן האי־שלילית ו־$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ אז $x \in [0,\pi)$. כעת נציב את t כפונקציה של x בעקומה γ ונקבל

$$\gamma_1\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}{\left(1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \cos^2 x.$$

$$\gamma_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}{\left(1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}$$
$$= \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$
$$= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sin x \cos x.$$

לכן במשתנה x העקומה נתונה לפי

$$\widetilde{\gamma}(x) = \gamma(t(x)) = \left(\cos^2 x, \sin x \cos x\right)$$
$$= \cos x \cdot (\cos x, \sin x), x \in [0, \pi).$$

לכן ההצגה הפולרית של עקומה זו היא $r = \cos\theta, \theta \in [0,\pi)$. לכן מהמשפט שניסחנו, אורך העקומה הוא

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta$$
$$= \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

תמונת העקומה $r = \cos\theta, \theta \in [0,\pi)$ היא מעגל עם רדיוס $\frac{1}{2}$ ומרכז ב־$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ כפי שניתן לראות באיור. ואכן אורך מעגל זה הוא π.