1. תהא $A$ מטריצה מעל המרוכבים עם פ״א $p_A = x^3 - 2ix^2 + 3x$. חשבו את $rank(A^k)$ לכל $k$

פתרון: הפ"א של $A$ הוא מדרגה 3, זה אומר ש$A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

$$p_A = x(x^2 - 2ix + 3) = x(x-3i)(x+i)$$

ל$A$ יש 3 ע"ע, $0, 3i, -i$.

$A$ לכסינה, כי למעשה הוכחנו טענה כללית בתרגול הקודם שמטריצה מגודל $n \times n$ יש לה $n$ ע"ע שונים היא לכסינה.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3i & \\ & & -i \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3i & \\ & & -i \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & (3i)^k & \\ & & (-i)^k \end{pmatrix}$$

$$rank\begin{pmatrix} 0 & & \\ & (3i)^k & \\ & & (-i)^k \end{pmatrix} = 2$$

כפל במטריצה הפיכה לא משנה את הדרגה, לכן $rank(A^k) = 2$.

2. תהי $A$ מטריצה מ$rank$ 1. הוכיחו שלפחות אחת מהמטריצות הבאות הפיכה:

$$A - 3I, A + 3I$$

פתרון: אם $A$ מגודל $1 \times 1$ , אם $A = 3I$ אז $A \neq -3I$ ולכן $A + 3I \neq 0$ ולכן היא הפיכה. אחרת $A \neq 3I$ ואז $A - 3I \neq 0$ ולכן הפיכה. (כי מדובר במטריצות מגודל $1 \times 1$, ואז המטריצה היא או הפיכה או 0).

נניח ש$A$ מגודל $n \times n$ עבור $n$ גדול מ1. אז 0 הוא ע"ע כי $A$ לא הפיכה. מכיוון ש$rank(A) =$ 1, אז $\dim N(A) = n - 1$, וזה בדיוק הר"ג של הע"ע 0.

לכן הר"א של 0 הוא לפחות $n-1$. זה אומר שיש לכל היותר עוד ע"ע אחד (כי סכום הריבויים האלגבריים הוא $n$).

אם $A - 3I$ לא הפיכה, זה אומר ש3 הוא ע"ע של $A$.

(הסבר: $\lambda$ הוא ע"ע של $A$ אמ"ם $|\lambda I - A| = 0 = |A - \lambda I|$ אמ"ם $|A - \lambda I|$ לא הפיכה.)

ואם $A + 3I$ לא הפיכה זה אומר ש$-3$ הוא ע"ע של $A$.

לא ייתכן ששניהם ע"ע של $A$, כי אמרנו שיש רק עוד אחד לכל היותר.

ולכן לפחות אחת מהמטריצות האלו הפיכה.

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, כל הערכים ב$A$ שווים $1$. האם $A$ לכסינה?
פתרון:

$$rank(A) = 1$$

ולכן כמו בתרגיל הקודם $0$ הוא ע"ע מר"ג $n-1$.
גם $n$ הוא ע"ע של המטריצה, עם וקטור עצמי

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

הר"א של $0$ גדול שווה מהר"ג ולכן הוא $n-1$ או $n$.
הר"ג של $n$ הוא לפחות 1, ולכן הר"א הוא לפחות 1.
כידוע, סכום הריבויים האלגבריים הוא לכל היותר $n$. לכן חייב להתקיים שהר"א של $0$ הוא $n-1$. ושל $n$ הוא 1 . אז קיבלנו שסכום הריבויים האלגבריים הוא $n$, ולכן הפ"א מל"ל, ולכל ע"ע ר"א=ר"ג.
לכן $A$ לכסינה.

4. תרגיל: נתונות 5 מטריצות. עליכם לקבוע מי מהמטריצות דומות אחת לשניה.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, A_3 \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & 1 & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, A_4 \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}$$

פתרון: לכולן יש אותו פ"א

$$p = (x-2)^3(x-5)^2$$

לכולן יש ע"ע 2 מר"א 3 וע"ע 5 מר"א 2.
נבדוק ריבויים גיאומטריים:
$A_1$:

$$A_1 - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

ר"ג של 2 הוא 1.

$$A_1 - 5I = A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & & & \\ & -3 & 1 & & \\ & & -3 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ר"ג של 5 = 2.
$A_1$ לא לכסינה ולכן לא דומה ל$A_4$.
$A_2$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

ר"ג של 2 = 2.
המטריצה לא לכסינה ולכן $A_2$ לא דומה ל$A_4$.
הוכחנו שלמטריצות דומות יש אותם ע"ע, ולכל ע"ע יש את אותו ריבוי גיאומטרי. לכן $A_1$ ו$A_2$ לא דומות.

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} - 5I = \begin{pmatrix} -3 & & & & \\ & -3 & 1 & & \\ & & -3 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

הר"ג של 5 = 2.
$A_3$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & 1 & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

הר"ג של 2 = 3

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & 1 & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} - 5I = \begin{pmatrix} -3 & & & & \\ & -3 & & 1 & \\ & & -3 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

הר"ג של 5 הוא 2.
קיבלנו ש$A_3$ לכסינה ולכן היא דומה ל$A_4$.
$A_5$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

הר"ג של 2 = 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix} - 5I = \begin{pmatrix} -3 & & & & \\ & -3 & 1 & & \\ & & -3 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

הר"ג הוא 1.

לכן $A_5$ לא דומה לאף אחת מהמטריצות כי בכולן הר"ג של 5 היה 2.

ע"ע, ו"ע ולכסון של העתקות לינאריות:

תהי $T : V \to V$ הע"ל. $\lambda$ יקרא ע"ע של $T$ אם קיים $v \neq 0$ כך ש

$$Tv = \lambda v$$

$v$ יקרא ו"ע של $T$ שמתאים ל$\lambda$.

אוסף הו"ע של $\lambda$ ביחד עם וקטור ה$0$ נקרא המ"ע של $\lambda$.

תרגיל: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נגדיר

$$T : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$$

$$T(B) = AB$$

הוכיחו ש$\lambda$ ע"ע של $T$ אמ"ם הוא ע"ע של $A$.

פתרון: $\Longrightarrow$ נניח ש$\lambda$ ע"ע של $A$ ונוכיח שהוא ע"ע של $T$.

קיים וקטור $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש$Av = \lambda v$. נגדיר

$$B = \begin{pmatrix} v & \cdots & v \end{pmatrix}$$

מטריצה שכל העמודות שלה הן $v$.

$$T(B) = AB = \begin{pmatrix} Av & \cdots & Av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v & \cdots & \lambda v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v & \cdots & v \end{pmatrix} = \lambda B$$

$B \neq 0$ ו"ע של $\lambda$ ולכן $\lambda$ הוא ע"ע של $T$.

$\Longleftarrow$: נניח $\lambda$ ע"ע של $T$, ונוכיח שהוא ע"ע של $A$.

קיימת מטריצה $0 \neq B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש:

$$T(B) = AB = \lambda B$$

$B \neq 0$ ולכן יש לה עמודה כלשהי ששונה מ$0$. נניח $C_i(B) \neq 0$.

$$AC_i(B) = C_i(AB) = C_i(\lambda B) = \lambda C_i(B)$$

קיבלנו ש$C_i(B)$ הוא ו"ע שמתאים ל$\lambda$ ולכן $\lambda$ ע"ע של $A$.

איך מוצאים ע"ע וו"ע של העתקה לינארית?

תשובה: בוחרים בסיס $B$ ומחשבים

$$[T]_B$$

הע"ע של $[T]_B$ הם הע"ע של $T$. והו"ע של $[T]_B$ הם וקטורי הקורדינטות לפי הבסיס $B$ של $T$.
כלומר, לא נקבל את $v$, אלא את $[v]_B$.
דוגמא: נגדיר בסיס $B = \left\{1+x, x, x^2\right\}$

$$\begin{aligned} T(1+x) &= -1+x^2 \\ T(x) &= 1+x^2 \\ T(x^2) &= 1+2x-x^2 \end{aligned}$$

מצאו ע"ע ו ו"ע.
פתרון:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda+2)^2 (\lambda-1)$$

$$V_{-2} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_1 = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

אז הע"ע של $T$ הם $-2, 1$.

$$V_{-2}(T) = span\{1+x-x^2, x-x^2\}$$

$$V_1(T) = span\{1+2x+x^2\}$$

הגדרה: $T$ נקראת לכסינה אם קיים בסיס $C$, כך ש

$$[T]_C$$

אלכסונית.
הוכחתם בהרצאה ש$T$ לכסינה אמ"ם יש בסיס למרחב שמורכב מוקטורים עצמיים שלה, והבסיס המלכסן, $C$, מורכב מוקטורים עצמיים. אמ"ם לכל בסיס $B$, $[T]_B$ לכסינה. הצורה האלכסונית של המטריצות המייצגות, היא בדיוק הצורה האלכסונית של $T$.
בדוגמא שלנו $T$ לכסינה, כי יש 3 ו"ע, הבסיס המלכסן

$$C = \{1+x-x^2, x-x^2, 1+2x+x^2\}$$

$$[T]_C = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

חילוק פולינומים:

נניח שיש פולינום מתוקן עם מקדמים שלמים ורוצים למצוא לו את השורשים.

שני שלבים:

1. שיטת הניחוש- מנחשים שורש אחד של הפולינום. מציבים מספרים ובודקים אם הם מאפסים את הפולינום. השורשים השלמים בהכרח מחלקים את הגורם החופשי של הפולינום.
2. נניח שמצאנו שורש $3$. זה אומר שהפולינום מתחלק ב$(x-3)$.

ואז נבצע חילוק פולינומים.

דוגמא: פרקו את $x^3+x^2-8x-12$ לגורמים לינאריים.

פתרון: נציב את המספרים: $1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,12,-12$

$-2$ מאפס את הפולינום.

| | |
|---|---|
| $x^2-x-6$ | |
| $x^3+x^2-8x-12$ | $(x+2)$ |
| $x^3+2x^2$ | |
| $-x^2-8x-12$ | |
| $-x^2-2x$ | |
| $-6x-12$ | |
| $-6x-12$ | |

$$x^3+x^2-8x-12=(x+2)(x-3)(x+2)$$

שילוש מטריצות:

הגדרה: מטריצה $A$ נקראת ניתנת לשילוש אם היא דומה למטריצה משולשית.

משפט: $A$ ניתנת לשילוש אמ"ם הפ"א של $A$ מל"ל.

אלגוריתם לשילוש מטריצה:

הפ"א של $A$ מל"ל זה אומר שיש ל$A$ ע"ע. לכל ע"ע נבחר בסיס למ"ע. נקח את האיחוד של הבסיסים (זה לא בהכרח בסיס ל$\mathbb{F}^n$), נשלים אותו לבסיס למרחב כולו.

נסמן

$$B=\{v_1,...,v_n\}$$

$$P=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & B \\ 0 & \ddots & & \\ & 0 & \lambda_m & \\ 0 & 0 & & D \end{pmatrix}$$

$D$ היא מטריצה מגודל יותר קטן. נפעיל את האלגוריתם על $D$.

$$Q^{-1}DQ = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 & & B' \\ 0 & \ddots & & \\ & 0 & \lambda_{m'}' & \\ 0 & 0 & & D' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}AP \begin{pmatrix} I & \\ & Q \end{pmatrix}$$