02-01-2011

אלגברה ליניארית 1 - תרגול 12 (מתמטיקה)

<u>הגדרה</u>: יהא $T:V\to W$ העת"ל. נגדיר את המרחבים הבאים:

· הגרעין של T: $\ker T=\{v\in V \mid T(v)=0\}$

· התמונה של T: $Im(T)=\{w\in W \mid \exists v\in V: T(v)=w\}=\{T(v)\mid v\in V\}$

<u>הערה</u>: מתקיים $\ker T\le V$ תת"מ, $Im T\le W$ תת"מ.

<u>דוגמא</u>:

נמצא את הגרעין והתמונה של העת"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x,x)$.

· גרעין: $T(x,y,z)=\vec{0} \to (x,x)=\vec{0} \to x=0$

$\ker T=\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\}=span\{(0,1,0),(0,0,1)\}$

ניתן לראות שזהו הבסיס ומתקיים $\dim\ker T=2$.

· תמונה: יהי $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. אזי $(a,b)\in ImT$ אם"ם קיים $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

כך ש- $T(x,y,z)=(a,b) \Leftarrow (x,x)=(a,b) \Leftarrow x=a, x=b \Leftarrow a=b$

$\Leftarrow (a,b)\in ImT$ אמ"מ $a=b$ $\Leftarrow$

$ImT=\{(a,a)\in\mathbb{R}^2 \mid a\in\mathbb{R}\}=span\{(1,1)\}$

קל לראות שזהו הבסיס ולכן $\dim ImT=1$.

שימו ♡ ש- $\overset{(2)}{\dim\ker T}+\overset{(1)}{\dim Im T}=\overset{(3)}{\dim\mathbb{R}^3}$, וזה לא מקרי.

$\boxed{\text{}}$
<u>משפט הדרגה</u>: יהי $T:V\to W$ אזי $\dim\ker T+\dim ImT=\dim V$

<u>הערה</u>: עבור מטריצה $A\in F^{m\times n}$: ~~rankA+dimNullA=n~~

$\dim(Null A)+rank(A)=n$

יהי $T:V\to W$ העת"ל. נניח $\dim V=n, \dim W=m$. ויהי A

המטריצה המייצגת של T מבסיסים כלשהם. אזי:

1) $V\cong F^n, W\cong F^m$

2) $\ker T\cong\{x\in F^n \mid Ax=0\}$ (מרחב האפס)

3) $ImT\cong C(A)\le F^m$

מרחב העמודות

<u>דוגמא</u>:

יהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העת"ל הנתונה ע"י המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&5&6\\0&1&0\end{pmatrix}$.

נמצא את הגרעין והתמונה של T.

שלב ראשון: נדרג את המטריצה המייצגת של T:

$A\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{צ'ר}&&\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&3\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}&\text{צ'ר}&\end{array}\end{array}$

כעת מתקיים:

$$ImT \cong C(A) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim ImT = 2$$

ושימו ♡ שבמקרה שלנו מתקיים שוויון $ImT = C(A)$.

בשביל מציאת הגרעין נפתור את המע' ההומוגנית $Ax=\vec{0}$ ונקבל:

$$Ker\,T = \{(-3t, 0, t) \mid t\in\mathbb{R}\} = span\{(-3,0,1)\}$$

$$\dim Ker T = 1$$

▲

תרגיל:

מצאו את הגרעין והתמונה של הע"ל $T_A: M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ הנתונה ע"י:

$T_A(X) = AX - XA$ עבור $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}$.

פתרון:

נמצא תחילה את המטריצה המייצגת של T_A: (בבסיס הסטנדרטי)

$$T_A\overset{X}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}} = \overset{A}{\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}}\overset{X}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}} - \overset{X}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\overset{A}{\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}$$

$$T_A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&1\\0&3\end{pmatrix},\quad T_A\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix},\quad T_A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\-3&0\end{pmatrix}$$

$$[T_A] = \begin{pmatrix}0&-3&0&0\\0&1&0&0\\3&0&-1&-3\\0&3&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{לאחר דירוג}} \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\3&0&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

שתי העמודות הראשונות הן עמודות ציר ולכן מתקיים:

$$ImT_A \cong C([T_A]) = span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$ImT_A = span\left\{\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3&1\\0&3\end{pmatrix}\right\}$$ נעביר לצורה מטריצית , $\dim ImT_A = 2$

עבור הגרעין נפתור את המע' ההומוגנית $[T_A]X=0$ ונקבל:

$$KerT_A \cong \left\{\left(\frac{s+3t}{3}, 0, s, t\right) \mid s,t\in\mathbb{R}\right\} = span\left\{\left(\tfrac{1}{3},0,1,0\right), (1,0,0,1)\right\}$$

נעביר למטריצות

$$Ker T_A = span\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \dim Ker T_A = 2$$

▲

תרגיל 2.3 (עמ' 56)

יהא $T: V\to V$ הע"ל. הוכיחו:

(א) $Ker\,T \subseteq Ker(T^2)$

(ב) $Im(T^2) \subseteq ImT$

פתרון:

(א) יהי $x \in KerT$ אזי $T(x)=0$. נפעיל T על שני האגפים ונקבל $T(T(x))=T(0) = 0$

ולכן $T^2(x)=0$ ולכן $x \in Ker(T^2)$.

(ב) יהי $x \in Im(T^2)$ אזי קיים $y \in V$ כך, ש- $T^2(y)=x$ ← $T(T(y))=x$.

נסמן $T(y)=z$ ונקבל $T(z)=x$ ולכן $x \in ImT$.

תרגיל 2.5

הוכיחו/הפריכו: יהיו $S,T: V \to V$ הע"ל כך, ש- $KerT=KerS$ וגם $ImT=ImS$, אזי $T=S$.

פתרון:

הפרכה: יהיו $T,S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרות ע"י $T(x)=x$, $S(x)=2x$ אזי

$KerT=KerS=\{\vec{0}\}$, $ImT=Im(S)=\mathbb{R}$

תרגיל 2.9 (עמ' 56)

תהא $T: V \to V$ הע"ל המקיימת $T^2=I$. יהיו $W=Ker(T+I)$,

$U=Ker(T-I)$. הוכיחו: $V=U \oplus W$ (סכום ישר). (V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $Char(\mathbb{F}) \neq 2$)

פתרון:

יש להראות שני דברים:

1) $U \cap W=\{0\}$. ואכן, יהי $v \in U \cap W$ אזי $v \in Ker(T-I) \wedge v \in Ker(T+I)$

$$\leftarrow \begin{cases} (T-I)v=0 \to T(v)=v \\ (T+I)v=0 \to T(v)=-v \end{cases} \to v=-v \Rightarrow v=0.$$

2) $V=U+W$. נראה כך, יש למצוא הצגה של וקטור שרירותי $v \in V$

בצורה $v=u+w$ עבור $u \in U$, $w \in W$.

$v=u+w$, $T(v)=T(u)+T(w)$

$u \in Ker(T-I)$, $(T-I)u=0$, $T(u)=u$; $w \in Ker(T+I)$, $(T+I)w=0$, $T(w)=-w$

ולכן קיבלנו מע' משוואות:

$$\begin{cases} v=u+w \\ T(v)=u-w \end{cases}$$

נפתור ונקבל:

$u = \frac{T(v)+v}{2}, \quad w = \frac{v-T(v)}{2}$

$\to \quad v = \frac{T(v)+v}{2} + \frac{v-T(v)}{2}$

וזאת ההצגה הרצויה.

סה"כ, $V = U \oplus W$.

▲

<u>משפט הדרגה:</u>

יהא $T: V \to W$ העל"ל, אזי $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

<u>הערה:</u>

נניח $\dim W = m$, $\dim V = n$ ונסמן $[T] = A \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

נסמן $Null(A) = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \vec{0}\}$ מרחב האפס של המטריצה.

כעת ניתן לכתוב את משפט הדרגה בצורה הבאה:

$\dim(Null(A)) + rank(A) = n$

מס' משתנים חופשיים ← ; מס משתנים מובילים ← ; → העמודות של המטריצה

<u>תרגיל</u> 2.10 (עמ' 56)

יהא $T: V \to W$ העל"ל. הוכיחו שהתכונות הבאות שקולות:

(א) $Ker(T) = \{\vec{0}\}$

(ב) T חח"ע

<u>פתרון:</u>

<u>א ← ב</u>

נניח בשלילה ש-T אינה חח"ע, אזי קיימים $v_1 \neq v_2 \in V$ כך, ש- $T(v_1) = T(v_2)$

$\Leftarrow T(v_1) - T(v_2) = 0 \Leftarrow T(v_1 - v_2) = 0 \Leftarrow 0 \neq v_1 - v_2 \in \ker T$, סתירה

לנתון $\Leftarrow T$ חח"ע

<u>ב ← א</u>

נניח בשלילה שקיים $0 \neq v \in \ker T$ ולכן $T(v) = 0$. אך, גם הע"ל

מתקיים $T(0) = 0$ ולכן $T(v) = T(0)$ למרות ש- $v \neq 0$, בסתירה לחח"ע.

$\Leftarrow \ker T = \{\vec{0}\}$.

▲

מסקנה מהתרגיל:

נהיה $T:V\to W$ העל"ל. אזי T איזומורפיזם $\Longleftrightarrow$ $KerT=\{0\}$ ו $ImT=W$.

בנוסף, אם $dimV=dimW$ אזי T ע.ל $\Longleftrightarrow$ T חח"ע.

(שכן $dimImT+dimKerT=V$, T על $\leftarrow$ $dimV=dimImT$

ולכן $dimKerT=0$ ולכן T חח"ע; והכיוון השני בהתאם.)

תרגיל 2.13

א. האם קיימת העל"ל $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ המקיימת $ImT=KerT$?

ב. האם קיימת העל"ל $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ המקיימת $ImT=KerT$?

פתרון:

א. לא! שכן $ImT=KerT$ $\Leftarrow$ $dimImT=dim\,KerT$ אבל עפ"י משפט המימד

$5=dimV=dimImT+dimKeT=2dimImT\rightarrow dim\,ImT=2\frac{1}{2}$

ב. אכן יש העל"ל כזאת; נגדיר אותה כפי משפט ההגדרה:

$$\begin{cases}T(1,0,0,0)=(0,0,0,0)\\T(0,1,0,0)=(0,0,0,0)\\T(0,0,1,0)=(1,0,0,0)\\T(0,0,0,1)=(0,1,0,0)\end{cases}\rightarrow T(x,y,z,w)=(z,w,0,0)$$

$KerT=ImT=span\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$

תרגיל 2.18

נהיה $T:V\to V$ העל"ל. הוכיחו שהתכונות הבאות שקולות:

א) $Ker(T^2)=Ker(T)$

ב) $Im(T^2)=Im(T)$

ג) $V=Ker(T)\oplus Im(T)$

פתרון:

ב$\leftarrow$א: ראינו בתרגיל 2.3 שמתקיים $Ker(T)\leq Ker(T^2)$ ולכן על מנת להראות שוויון מספיק להראות שוויון של מימדים.

$dimV=dimImT+dim\,KerT=dimIm(T^2)+dim\,Ker(T^2)$

$\rightarrow dim\,KerT=dim\,Ker(T^2)\rightarrow KerT=Ker(T^2)$

א$\leftarrow$ג: על מנת להראות סכום ישר, יש להראות שני דברים:

1) $KerT\cap ImT=\{0\}$

יהי $v\in KerT\cap ImT$ אזי $T(v)=0$ וכן קיים w כך, ש- $T(w)=v$.

נפעיל T על שני האגפים: $T^2(w)=T(v)=0$ $\leftarrow$ $T^2(w)=0$ $\leftarrow$ $w\in Ker(T^2)$

אבל, $KerT=Ker(T^2)$ ולכן $w\in KerT$ ולכן $T(w)=v=0$ $\Rightarrow$ $v=0$.

$\Rightarrow$ $KerT\cap ImT=\{0\}$.

2) $V=ImT+KerT$ .. מתקיים $KerT+ImT\subseteq V$ תת"מ ולכן

נותר להראות את השוויון מספיק להראות שוויון מימדים:

$$\dim(KerT+ImT)\underset{\text{משפט המימדים}}{=}\dim KerT+\dim ImT-\underbrace{\dim(KerT\cap ImT)}_{0}$$

$$\dim V\underset{\text{משפט הדרגה}}{=}\dim KerT+\dim ImT$$

$$\rightarrow \dim(KerT+\dim ImT)=\dim V\rightarrow KerT+ImT=V$$

$$\Leftarrow\ V=KerT\oplus ImT$$

ג $\leftarrow$ ב 3 כבר ראינו $ImT^2\subseteq ImT$ ולכן נוכיח את ההכלה השנייה $ImT\subseteq ImT^2$.

יהי $v\in ImT$ אזי קיים $u\in V$ כך, ש- $T(u)=v$. $u\in V$ ולכן

ניתן לרשום $u=u_1+u_2$ עבור $u_1\in KerT$, $u_2\in ImT$ אזי

$$v=T(u)=T(u_1)+T(u_2)=T(u_2)$$

$u_2\in ImT$ ולכן קיים $w\in V$ כך, ש- $T(w)=u_2$ ולכן בסה"כ $v=T(T(w))$

$\Rightarrow$ $v=T^2(w)$ $\Rightarrow$ $v\in Im(T^2)$.

+תרגיל 2.17.

תרגיל 2.17

הראו בעזרת הע"ל שאם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה משמאל אזי A הפיכה.

פתרון:

נגדיר הע"ל $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ ע"י $T(X)=AX$.

מתקיים: T חח"ע

הוכחה:

נרשום $\ker T$: $T(X)=0 \to AX=0$

A הפיכה משמאל $\Leftarrow$ קיימת $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$: $BA=I$

ולכן: $AX=0 /\cdot B$ $\Leftarrow$ $(\cancel{AB})X=0$ $\Leftarrow$
$(BA)X=0$

$IX=0$ $\Leftarrow$ $X=0$.

ולכן T חח"ע.

משיקולי מימדים T על.

בפרט, קיימת מטריצה X כך ש- $T(X)=I$

$\Leftarrow$ $AX=I$ ולכן A הפיכה מימין.

לסיכום: A הפיכה.

מש"ל