20.7.2021

עוד הפיכות

1. תזכורות: שיעור שעבר ראינו שלכל A ריבועית מתקיים A הפיכה אמ"מ לכל n טבעי A^n הפיכה. במקרה זה מתקיים

$$\left(A^n\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^n$$

אפילו אתם יכולים להתקל בסימון A^{-n}.

2. הוכיחו לכל A ריבועית מתקיים: A הפיכה אמ"מ A^t הפיכה. במקרה זה מתקיים $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$.
הוכחה: $(\Leftarrow)$מניחים ש A הפיכה. צ"ל ש A^t הפיכה. מההנחה, קיימת A^{-1}. נחשב

$$A^t\left(A^{-1}\right)^t\overset{(*)}{=}\left(A^{-1}A\right)^t=I^t=I$$

זה אומר ש A^t הפיכה וההופכית שלה היא $\left(A^{-1}\right)^t$ כנדרש. (כאשר $(*)$ מנומקת ע"י כללי שיחלוף שראינו: $\left(M_1M_2\right)^t=M_2^tM_1^t$)
$(\Rightarrow)$ מניחים A^t הפיכה. צ"ל ש A הפיכה. מהכיוון הראשון (שהרי A^t גם היא מטריצה הפיכה), נקבל שגם $\left(A^t\right)^t$ הפיכה. כיוון ש

$$\left(A^t\right)^t=A$$

סיימנו.

(א) מסקנה: עבור A מטריצה סימטרית והפיכה מתקיים שגם ההופכית A^{-1} היא סימטרית.
הוכחה: צ"ל $\left(A^{-1}\right)^t=A^{-1}$ אכן:

$$\left(A^{-1}\right)^t=\left(A^t\right)^{-1}=A^{-1}$$

כאשר השיוויון הראשון הוא התרגיל שעשינו והשיוויון השני נובע מכך ש A סימטרית (כלומר $A^t=A$).

3. תהא A ריבועית כך ש $A+A^2+3A^4$ הפיכה. הוכיחו A הפיכה.
הוכחה: נתון ש $A+A^2+3A^4$ הפיכה, כלומר

$$A\left(I+A+3A^3\right)$$

הפיכה ומכיוון שכפל הפיך גורר שכל אחד מהגורמים הפיך, נקבל ש $A, I+A+3A^3$ הפיכות. בפרט A הפיכה.

4. עבור $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ריבועית מתקיים: A לא הפיכה אמ"מ קיימת $B\neq 0$ (מאותו גודל) כך ש $AB=0$
הוכחה: $(\Leftarrow)$ נניח A לא הפיכה. צ"ל קיימת $B\neq 0$ (מאותו גודל) כך ש $AB=0$. כיוון ש A אינה הפיכה, הצורה הקנונית שלה שונה מ I. כיוון ש A ריבועית, זה אומר שבצורה הקנונית יש שורת אפסים. זה גורר שיש לכל היותר $n-1$ איברים מובילים ולכן יש גם לכל היותר $n-1$ משתנים תלויים. מכאן שיש לפחות משתנה חופשי אחד. בנוסף, לא יכולה להיות שורת

סתירה (כי זוהי מערכת הומגנית) ולכן יש פתרון $v \neq 0$ למערכת $Ax = 0$. כלומר, קיים $v \neq 0$ כך ש $Av = 0$. נגדיר

$$B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v & \cdots & v \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

מטריצה שכל עמודה שלה שווה ל v הנ"ל. ברור כי $B \neq 0$ (כי $v \neq 0$) ומתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Av & \cdots & Av \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ 0 & \cdots & 0 \\ | & | & | \end{pmatrix} = 0$$

כנדרש.

($\Rightarrow$) נניח קיימת $B \neq 0$ (מאותו גודל) כך ש $AB = 0$. צ"ל A לא הפיכה. נב"ש ש A הפיכה ואז קיימת A^{-1}. נכפיל את השיוויון בהנחה לקבל

$$B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$$

בסתירה לכך ש $B \neq 0$.

5. תהא A ריבועית. הוכיחו/הפריכו: אם $A + A^2 = 0$ אז A אינה הפיכה.

פתרון: ניסיון הוכחה (שיכשל): נב"ש ש A הפיכה ולכן קיימת A^{-1}. מה"אם" נקבל ש

$$A(I + A) = 0$$

נכפול ב A^{-1}את השיוויון ונקבל $I + A = 0$ ואז $A = -I$.

מתוך ה"הוכחה" שנכשלה, נמצאת ההפרכה הבאה: נגדיר $A = -I$ והיא הפיכה (הופכית שלה היא $-I$) ואכן מתקיים כי

$$A + A^2 = -I + (-I)^2 = -I + I = 0$$

הערה: ה"הוכחה" (שנכשלה) היתה עובדת מצוין אם היינו מוסיפים את הדרישה ש $A \neq -I$.

6. תהא $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ התלויה בפרמטר a. עבור אילו ערכי a המטריצה הפיכה.

פתרון: נבדוק עבור אילו a ים, אחרי דירוג (קנוני) נגיע למטריצת היחידה. נדרג (ונקצר בפירוט)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) \end{pmatrix}$$

עבור $a \neq 1, -2$ הגענו לצורה מדורגת ויש לה 3 איברים מובילים ולכן הצורה קנונית שלה תהיה I ולכן במקרה זה היא תהיה

הפיכה.

עבור $a=1$ או $a=-2$ תהיה מטריצה עם שורת אפסים ולכן לא הפיכה ולכן גם A אינה הפיכה.

7. תהא A מטריצה ריבועית הפיכה. תהא B מטריצה המתקבלת מהחלפת שורות $1,2$ של A. כלומר $A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B$.
מה הקשר בין ההופכית של A להופכית של B?
פתרון: המטריצה האלמנטרית שמתאימה לפעולה $R_1 \leftrightarrow R_2$ היא המטריצה

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ואז, מכיוון שגם $A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B$ נקבל ש $A = EB$ (מכיוון שגם $B \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} A$ אז גם $B = EA$). כעת נכפול ב A^{-1} (שנתון שקיימת) ונקבל

$$I = A^{-1}A = A^{-1}EB$$

ולכן, ההופכית של B היא $A^{-1}E$. בשימוש כפל עמודה (תזכורת - כפל עמודה: בהניתן M_1, M_2 מטריצות

$$C_j(M_1M_2) = M_1 \cdot C_j(M_2)$$

$$R_i(M_1M_2) = R_i(M_1) \cdot M_2$$

זה מוכח בהרצאה). העמודה הראשונה של $A^{-1}E$ זה

$$C_1(A^{-1}E) = A^{-1}C_1(E) = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_2(A^{-1})$$

.

העמודה של $A^{-1}E$ זה

$$C_2(A^{-1}E) = A^{-1}C_2(E) = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_1(A^{-1})$$

. ושאר העמודות האחרות של $A^{-1}E$ זהות לעמודות של A^{-1}. כלומר ההופכית של B היא $A^{-1}E$ שזה החלפת שתי העמודות

הראשונות של A^{-1}. למשל אם $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&0&0\\9&8&7&1\end{pmatrix}$ אז

$$A^{-1}E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&0&0\\9&8&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3&0\\5&4&6&0\\8&7&0&0\\8&9&7&1\end{pmatrix}$$

מ"ו

1. האם $V=\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{R}$) ביחס לחיבור "רגיל" וכפל בסקלר $\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\y\end{pmatrix}$.

פתרון: בכל מרחב וקטורי מתקיים ש $0v=0_V$. אבל אצלנו וקטור האפס הוא $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ אבל

$$0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ולכן זה לא מ"ו. (שימו לב שאכן $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ הוא וקטור האפס שהרי לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ב V מתקיים כי

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ולכן, לפי הגדרה, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ הוא וקטור האפס).

2. האם $V=\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{R}$) ביחס לחיבור "רגיל" וכפל בסקלר $\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\0\end{pmatrix}$

פתרון: בכל מרחב וקטורי מתקיים ש $1\cdot v=v$. אבל אצלנו

$$1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

ולכן זה לא מ"ו.

3. האם $V=\mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי ביחס לחיבור "רגיל" וכפל בסקלר $\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2x\\\alpha^2y\end{pmatrix}$

פתרון: בכל מרחב וקטורי מתקיים ש $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha v + \beta v$. אבל אצלנו נראה שזה לא מתקיים עבור $\alpha=\beta=1, v=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$(1+1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 \\ 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ולכן זה לא מ"ו.

4. הוכיחו/הפריכו: W הוא תת מרחב של V במקרים הבאים:

(א) $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0\leq x,y\right\}$

פתרון: לא ת"מ. למשל ל $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\in W$ ו -2 ממשי אבל הכפל בסקלר בינהם

$$-2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \notin W$$

(ב) $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (0\leq x,y)\vee(0\geq x,y)\right\}$

פתרון: לא ת"מ. למשל ל $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\in W$ אבל החיבור בינהם

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$$

(ג) $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y=3x\right\}$.

פתרון: אתם ראיתם/תראו כי אוסף פתרונות למערכת הומגנית היא תמיד ת"מ. אצלנו

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y=3x\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 3x-y=0\right\}$$

וזה אוסף הפתרונות למערכת ההומגנית $3x-y=0$ (משוואה אחת, שני נעלמים).

(ד) $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W=\{A\mid \forall i<j:\ A_{i,j}=0\}$ (המטריצות המשולשיות התחתונות. למשל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ משולשית תחתונה).

פתרון: אכן ת"מ. נוכיח בעזרת הקריטריון המקוצר:

- קיום איבר האפס ב W: צ"ל $0 \in W$. אכן $0 \in W$ כי מטריצת האפס היא משולשית תחתונה.
- סגירות לחיבור וקטורים ב W: לכל $A_1, A_2 \in W$ מתקיים $A_1 + A_2 \in W$.
הוכחה: יהיו $A_1, A_2 \in W$ צ"ל $A_1 + A_2 \in W$. צ"ל שלכל $i < j$ מתקיים $(A_1 + A_2)_{i,j} = 0$. אכן

$$(A_1 + A_2)_{i,j} = (A_1)_{i,j} + (A_2)_{i,j} = 0 + 0 = 0$$

(כאשר השיויון השני נובע מכך ש $A_1, A_2 \in W$ משולשיות תחתונות).
- סגירות לכפל בסקלר ב W: לכל $A \in W$ ולכל סקלר α מתקיים $\alpha A \in W$.
הוכחה: תהא $A \in W$ ו α סלקר. צ"ל $\alpha A \in W$ אכן לכל $i < j$ מתקיים

$$(\alpha A)_{i,j} = \alpha A_{i,j} = \alpha 0 = 0$$

כנדרש.

(ה) $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W = \{A \mid \exists B :\ AB = I\} \cup \{0\}$ קבוצת המטריצות ההפיכות ביחד עם מטריצת האפס.
פתרון: לא! לא סגור לחיבור. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in W$ אבל לא החיבור שלהם).

(ו) $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ ו W קבוצת המטריצות הלא הפיכות.
פתרון: לא! לא סגור לחיבור. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$