פתרון תרגיל בית 12 – טופולוגיה

שאלה 1

יהיו (X_i,τ_i) מרחבים טופולוגיים דיסקרטיים לכל $i\in I$. האם מרחב המכפלה $\prod_{i\in I} X_i$ דיסקרטי?

רמז: תלוי.

פתרון

מקרה ראשון: באוסף $\{X_i\}$ יש אינסוף אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת. במקרה זה $X=\prod_{i\in I} X_i$ אינו דיסקרטי. נראה שלמעשה אף נקודון אינו פתוח. נניח בשלילה שקיים נקודון $\{x\}$ פתוח. אם הוא פתוח, אזי ניתן לבטא אותו כאיחוד של קבוצות בסיסיות. מכיוון ש- $|\{x\}|=1$, ניתן להסיק שקיימת B בסיסית כך ש- $B=\{x\}$. מכיוון שבאוסף $\{X_i\}$ יש אינסוף אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת, ומצד שני, קיים לכל היותר מספר סופי של אינדקסים i כך ש- $p_i(B)\neq X_i$ (לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה), נקבל שקיים $i_0\in I$ כך ש- $p_{i_0}(B)=X_{i_0}$ וכן $|X_{i_0}|>1$, בסתירה לכך ש- $|p_{i_0}(B)|=1$.

מקרה שני: באוסף $\{X_i\}$ יש לכל היותר מספר סופי של אינדקסים כך שבמרחב X_i יש יותר מנקודה אחת. במקרה זה כל נקודון ב- X הוא קבוצה בסיסית (הסבר: לכל $i\in I$, פרט למספר סופי, $p_i(\{x\})=X_i$). לכן, במקרה זה X הינו דיסקרטי.

מש"ל

שאלה 2

יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה.

פתרון

לפי תרגיל שהוכחנו, מרחב המכפלה $X\times X$ הוא מטריזבילי, לכן הטופולוגיה עליו היא הטופולוגיה המתקבלת מהמטריקה $d_{\max}$, כלומר מהמטריקה $d_{\max}:(X\times X)\times(X\times X)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $d_{\max}((x,y),(t,s))=\max\{d(x,t),d(y,s)\}$.

נראה שהפונקציה רציפה לפי $d_{\max}$ ואז בפרט היא רציפה מטופולוגית המכפלה. נוכיח רציפות בנקודה (x,y). צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{\max}\left((x,y),(t,s)\right)<\delta$ אז $\left|d(x,y)-d(t,s)\right|$.

יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. אזי אם $d_{\max}\left((x,y),(t,s)\right)<\delta$ מתקיים

$$\left|d(x,y)-d(t,s)\right|\le d(x,t)+d(y,s)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

שימו לב: אי השוויון $\left|d(x,y)-d(t,s)\right|\le d(x,t)+d(y,s)$ נובע מאי שוויון המשולש של המטריקה d (איך?).

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

יהי X מרחב טופולוגי ותהי I קבוצת אינדקסים. נסמן ב- X^I את מרחב המכפלה $\prod_{i\in I}X$.

לכל $x\in X$ נגדיר $f_x\in X^I$ להיות הווקטור האינסופי שכל רכיביו הם x. נסמן $Y=\{f_x \mid x\in X\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ- X^I. הוכיחו כי X הומיאומורפי ל Y.

<u>פתרון</u>

תהי $g:X\to Y$ מוגדרת ע"י $g(x)=f_x$. פונקציה זו רציפה שכן מתקבלת כצמצום הטווח של הפונקציה הרציפה $g:X\to\prod_{i\in I}X$ (המוגדרת על-ידי $g(x)=f_x$). אכן, הפונקציה האחרונה רציפה לפי קריטריון לרציפות פונקציה לתוך מרחב מכפלה, שכן היא רציפה רכיב-רכיב (בכל רכיב מדובר בפונקציית הזהות). תזכורת: $g:X\to\prod_{i\in I}X$ רציפה אם ורק אם $p_i\circ g:X\to X$ רציפה לכל $i\in I$. אבל לכל $i\in I$ מתקיים $p_i\circ g(x)=p_i(f_x)=x$ כלומר לכל $i\in I$ מתקיים $p_i\circ g=Id_X$ ופונקציית הזהות כמובן רציפה ממ"ט לעצמו. נקבע $i_0\in I$. קל לראות שההופכית של $g:X\to Y$ היא הפונקציה $p_{i_0}:Y\to X$ שמתקבלת מצמצום התחום של פונקציית ההטלה הרציפה $p_{i_0}:\prod_{i\in I}X\to X$. לכן נקבל ש- g הוא הומיאומורפיזם מ- X ל- Y.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו שמכפלת מרחבי T_1 היא מרחב T_1.

<u>פתרון</u>

נניח שלכל $i \in I$ X_i הוא מרחב T_1 ונוכיח ש- $\prod_{i\in I} X_i$ הוא מרחב T_1. שקול להוכיח שכל נקודון סגור ב- $\prod_{i\in I} X_i$.

יהי $\prod_{i\in I}\{x_i\}$ נקודון. נראה שהמשלים שלו פתוח. מתקיים: $\left(\prod_{i\in I}\{x_i\}\right)^C = \bigcup_{i\in I}\prod_{j\in I} Y_{j,i}$ כאשר

$$Y_{j,i} = \begin{cases} X_j & j \neq i \\ X_j \setminus \{x_j\} & j = i \end{cases}.$$

<u>הערה</u>: כדי להבין טוב יותר את החישוב הנ"ל התבוננו במכפלה סופית ושכנעו את עצמכם שזוהי הצורה הכללית של המשלים של נקודון במרחב מכפלה.

כעת, מכיון שכל המרחבים הנתונים הם T_1 אז בהכרח לכל $i, j \in I$ מתקיים ש- $Y_{j,i}$ פתוחה ב- X_j. מכאן, לכל $i \in I$ $\prod_{j\in I} Y_{j,i}$ פתוחה בסיסית במרחב המכפלה ולכן $\left(\prod_{i\in I}\{x_i\}\right)^C = \bigcup_{i\in I}\prod_{j\in I} Y_{j,i}$ פתוחה כאיחוד של פתוחות.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. יהי X מ"ט דיסקרטי עם בסיס B. הוכיחו שלכל $x \in X$ מתקיים $\{x\} \in B$.

ב. יהי X מ"ט עם בסיס B, Y קבוצה ו- $f: X \to Y$ פונקציה **על**. הוכיחו/הפריכו: $B' = \{O \subseteq Y : f^{-1}(O) \in B\}$ בסיס לטופולוגיית המנה על Y.

ג. יהי $\mathbb{R}_l$ הישר של סורגנפריי ותהי $f: \mathbb{R}_l \to \mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם. מצאו את טופולוגיית המנה τ על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f.

<u>פתרון</u>

א. נסמן את הטופולוגיה הדיסקרטית ב- τ. תהי $x \in X$ אזי $\{x\} \in \tau$. B בסיס ולכן קיימת $U \in B$ כך ש- $x \in U \subseteq \{x\}$. מכאן בהכרח $U = \{x\} \in B$.

ב. נפריך את הטענה על-ידי דוגמה נגדית מהתרגול. ניקח $X = \mathbb{Z}$ מ"ט דיסקרטי כש- B הוא בסיס המורכב מכל הנקודונים.

תהי Y הקבוצה $\mathbb{Z}_3$ ו- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ מוגדרת ע"י $f(m) = m(\bmod 3)$. ראינו שבמקרה זה טופולוגית המנה τ על Y היא הדיסקרטית. נראה ש- $\{0\} \notin B'$ ולכן על-פי הסעיף הקודם B' אינו בסיס לטופולוגיית המנה על Y. ואכן, אחרת, $\{0\} \in B'$ אבל אז נקבל מהגדרת B' ש- $f^{-1}(\{0\}) = 3\mathbb{Z} \in B$ בסתירה להגדרת B.

דוגמה נוספת: $Y = \{a,b\}$, $X = \{x,y,z\}$, נבחר $B = \{\{x\},\{y\},\{z\}\}$, ונגדיר את $f : X \to Y$ על-ידי $f(z) = b$, $f(x) = f(y) = a$. אזי B' הוא לא בסיס ל-Y (בדקו!).

ג. $\tau = \tau_{disc}$ הטופולוגיה הדיסקרטית. הוכחנו בעבר ש-$f : \mathbb{R}_l \to (\mathbb{Z}, \tau_{disc})$ פונקציית הערך השלם רציפה ולכן נקבל מיידת ש- $\tau = \tau_{disc}$.

מש"ל