פתרון תרגיל בית 6

שאלה 1

חשב את האינטגרלים הבאים, או הוכח שאינם קיימים:

א. $\int_2^\infty \frac{x+1}{x^2(1-x)}dx$. ב. $\int_0^\infty xe^{-x}dx$. ג. $\int_0^\infty \cos x dx$

ד. $\int_{-\infty}^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$. ה. $\int_{-\infty}^\infty x\sin x^2 dx$ ו. $\int_2^\infty \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-1}}$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$\int_2^\infty \frac{x+1}{x^2(1-x)}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{x+1}{x^2(1-x)}dx$$

$$\frac{x+1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{1-x}$$

$$x+1 = A\cdot x(1-x)+B(1-x)+Cx^2$$

$$x=0:\ 1=B$$
$$x=1:\ \ 2=C$$
$$x=-1\ \ 0=-2A+2+2 \Rightarrow A=2$$

$$I=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{1-x}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}\right)dx=\lim_{b\to\infty}2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|\Big]_2^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(2\ln|b|-\frac{1}{b}-2\ln|b-1|\right)-2\ln 2+\frac{1}{2}+2\ln|1|=\lim_{b\to\infty}2\ln\left|\frac{b}{b-1}\right|-2\ln 2+\frac{1}{2}=\lim_{b\to\infty}2\ln\left|\frac{1}{1-b}\right|-2\ln 2+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}-2\ln 2$$

סעיף ב

$\int_0^\infty xe^{-x}dx$. נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים $\int xe^{-x}dx$.

נחשב בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$u=x \quad v=-e^{-x}$

$u'=1 \quad v'=e^{-x}$

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}.$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^\infty=\lim_{b\to\infty}\left[-be^{-b}-e^{-b}+1\right]=1.$$

סעיף ג

$\int_0^\infty \cos x dx=[\sin x]_0^\infty=\lim_{b\to\infty}\sin b$. ראינו בסמסטר קודם שהגבול $\lim_{b\to\infty}\sin b$ לא קיים והאינטגרל מתבדר.

סעיף ד

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}=\lim_{b\to-\infty}\int_b^1\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}\underset{\substack{t=e^x\\ dt=e^x dx\\ x=1\to t=e\\ x=b\to t=e^b}}{=}\lim_{b\to-\infty}\int_{e^b}^{e}\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{b\to-\infty}\left[arctg(t)\right]_{e^b}^{e}=arctg(e)-\lim_{b\to-\infty}arctg(e^b)=arctg(e)$$

סעיף ה

$\int_{-\infty}^{\infty}x\sin x^2dx$ נחשב את האינטגרל הלא מסוים $\int x\sin x^2dx$.

נציב $t=x^2 \Leftarrow dt=2xdx$. $\int x\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int\sin tdt=-\frac{1}{2}\cos t=-\frac{1}{2}\cos x^2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\sin x^2dx=\int_{-\infty}^{0}x\sin x^2dx+\int_{0}^{\infty}x\sin x^2dx.$$

מספיק להראות ש $\int_{0}^{\infty}x\sin x^2dx$ מתבדר כדי להראות שכל האינטגרל מתבדר.

$\int_{0}^{\infty}x\sin x^2dx=\left[-\frac{1}{2}\cos x^2\right]_0^{\infty}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cos x^2+\frac{1}{2}\right]$ הגבול לא קיים, ולכן האינטגרל מתבדר.

סעיף ו

$$\int_{2}^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-1}}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_2^b 4x^3dx\cdot\left(x^4-1\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\left(x^4-1\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}\right]_2^b=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}2\sqrt{b^2-1}-2\sqrt{15}=\infty$$

$\Downarrow$

מתבדר

שאלה 2

בדוק בעזרת מבחן ההשוואה הראשון האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

א. $\int_1^{\infty}x^{-x}dx$. ב. $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x\ln^2(x+1)}dx$. ג. $\int_1^{\infty}\frac{2+\sin x}{x}dx$ ד. $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

פתרון שאלה 2

הערה: שימו לב: בכל האינטגרליים $\int_a^{\infty}f(x)dx$ מתקיים התנאי $f(x)\ge 0$ לכל $a\le x$.

סעיף א

$\int_1^{\infty}x^{-x}dx=\int_1^{2}x^{-x}dx+\int_2^{\infty}x^{-x}dx$. מכיוון שהאינטגרל $\int_1^{2}x^{-x}dx$ קיים וסופי, מספיק להראות ש $\int_2^{\infty}x^{-x}dx$ מתכנס.

לכל $2 \le x$ מתקיים $\frac{1}{x^x} \le \frac{1}{x^2}$. מכיוון ש $\int_2^\infty x^{-2}dx$ מתכנס נקבל ממבחן ההשוואה הראשון שגם האינטגרל $\int_2^\infty x^{-x}dx$ מתכנס.

סעיף ב

$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\ln^2(x+1)}dx$.

לכל $1 \le x$ מתקיים $\arctan x \le \frac{\pi}{2}$ ולכן $\frac{\arctan x}{x\ln^2(x+1)} \le \frac{\pi}{2(x+1)\ln^2(x+1)}$ לכל $1 \le x$.

ממבחן ההשוואה הראשון מספיק להראות ש $\int_1^\infty \frac{\pi}{2(x+1)\ln^2(x+1)}dx$ מתכנס.

מכיוון ש $\int_1^\infty \frac{\pi}{2(x+1)\ln^2(x+1)}dx = \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}dx$ מספיק להוכיח ש $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}dx$ מתכנס. נציב $t = \ln(x+1) \Leftarrow dt = \frac{dx}{x+1}$.

מכיוון ש $\lim_{x\to\infty}\ln(x+1) = \infty$ נקבל ש $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t^2}dt$.

מכיוון ש $\int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t^2}dt$ מתכנס נקבל ש $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\ln^2(x+1)}dx$ מתכנס.

סעיף ג

$\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{x}dx$ מכיוון ש $-1 \le \sin x$ נקבל ש $1 \le 2+\sin x \Leftarrow \frac{1}{x} \le \frac{2+\sin x}{x}$.

מכיוון ש $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר נקבל גם ש $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{x}dx$ מתבדר.

סעיף ד

$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ מכיוון ש $\sin^2 x \le 1$ נקבל ש $\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$.

מכיוון ש $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס גם $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ מתכנס.

שאלה 3

בדוק בעזרת מבחן המנה האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

א. $\int_2^\infty \frac{x+7}{\sqrt{x^5-3x}}dx$. ב. $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ ג. $\int_1^\infty \frac{x^4+1}{x^5+3x^2-6}dx$. ד. $\int_1^\infty \left(\ln\left(1+e^x\right)-x\right)dx$

פתרון שאלה 3

סעיף א

$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ מתכנס. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{\sqrt{x^5-3x}} : \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x^5-3x}} = 1$.

סעיף ב

נשים לב תחילה שעבור $0 \le \alpha \le \pi$ $0 \le \sin\alpha$ ולכן עבור $1 \le x$ נקבל ש $0 \le \sin\frac{1}{x}$.

$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ וממבחן המנה $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ מתבדר.

סעיף ג

$\int_1^\infty \frac{x^4+1}{x^5+3x^2-6}dx$ נשים לב ש $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^5+3x^2-6} : \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x}{x^5+3x^2-6} = 1.$$

$\int_1^\infty \frac{x^4+1}{x^5+3x^2-6}dx$ מתבדר.

סעיף ד

$\int_1^\infty \left(\ln\left(1+e^x\right)-x\right)dx$. נשים לב ש $\ln\left(1+e^x\right)-x = \ln\left(1+e^x\right)-\ln e^x = \ln\frac{1+e^x}{e^x} = \ln\left(e^{-x}+1\right)$.

ראינו ש $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס. נחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}+1\right)}{\frac{1}{x^2}}$. מכלל לופיטל נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}+1\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{-x}}{2\left(e^{-x}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2\left(1+e^x\right)} = 0$$

ממבחן המנה נקבל שמהתכנסות $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס גם $\int_1^\infty \left(\ln\left(1+e^x\right)-x\right)dx$.

שאלה 4

הוכח כי האינטגרל $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ עבור $a>0$ מתכנס לכל $\alpha>0$.

פתרון

נסמן: $f(x)=\sin x$ ו $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$.

$f(x)$ ו $g(x)$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ לכל $b>a$ (כי נתון $a>0$).

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| = \left|\int_a^\infty \sin x dx\right| = \left|\lim_{b\to\infty}\int_a^b \sin x dx\right| = \left|\lim_{b\to\infty}\left(-\cos x\right)\Big|_a^b\right| = \left|-\lim_{b\to\infty}\cos b+\cos a\right| \le 2$$

$g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ היא פונקציה מונוטונית ומקיימת $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$, $\alpha>0$.

לפי מבחן דריכלה $\Leftarrow$ $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס.

<u>שאלה 5</u>

הוכח או הפרך: אם $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנס, אזי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

<u>פתרון</u>

הדוגמא הנ"ל מראה שאם $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנס, אזי לא בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

נסתכל על הפונקציה $f(x)=\sin(x^2)$.

הגבול לא קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\sin(x^2)\to$

נסתכל על $\int_1^{\infty}\sin(x^2)dx$.

לפי שאלה 4 האינטגרל מתכנס $\int\sin(x^2)dx \underset{\substack{x^2=t\\ x=\sqrt{t}\\ dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt}}{=} \int\sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{2}}}dt\to$ (*)

<u>שאלה 6</u>

הוכח כי $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}<1+\frac{\pi}{4}$.

<u>פתרון</u>

תחילה נשים לב ש

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}=\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}$$

מכיוון ש $x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4\geq 0$ לכל x נקבל ש

$$1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4\geq 1$$

ואז $\frac{1}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}\leq 1$ ולכן

$$\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}\leq\int_0^1 dx=1\cdot$$

מכיוון ש $\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3>1$

(ניתן לקבל זאת ע"י חקירת הפונקציה $f(x)=\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3$) נקבל ש

$$1+x^2\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4>1+x^2$$ ולכן

ואז $\frac{1}{1+x^2\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}<\frac{1}{1+x^2}$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2\cdot\left(\sin(11x)+\sqrt{3}\cdot\cos(11x)+3\right)^4}<\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\left[\arctan x\right]_1^{\infty}=\lim_{b\to\infty}\left[\arctan b-\arctan 1\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

.