שיטות נוספות לחישוב אינטגרל לא מסוים

הצבות טריגונומטריות

$$x = a \cdot \sin t$$

$$x = a \cdot \cos t$$

נשתמש בד"כ כשמופיע הביטוי $\sqrt{a^2 - x^2}$

הסבר

$$\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a|\cos t| =_{-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}} a \cdot \cos t$$

אפשר להתייחס לזה ש- $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ בגלל ש-$a \cdot \sin t$ מקבל כל ערך x בתחום הגדרה.

$$x = a \cdot \sin t$$

$$\frac{x}{a} = \sin t$$

$$t = \arcsin \frac{x}{a}$$

$\sin t$ פונקציה הפיכה רק כאשר התחום הוא $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ והטווח $[-1,1]$.

תרגיל

הראו ש:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

פתרון

נציב:

$$x = a \cdot \sin t$$

$$dx = a \cdot \cos t \, dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} a \cdot \cos t \, dt = \int \frac{1}{a \cdot \cos t} a \cdot \cos t = \int 1 \, dt = t = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

תרגיל

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

פתרון

$$x = a \cdot \sin t$$

$$dx = a \cdot \cos t \, dt$$

$$\int \frac{a^2 \sin^2 t}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} a \cdot \cos t \, dt =$$

$$\int a^2 \sin^2 t \, dt = a^2 \int \sin^2 t \, dt =$$

$$= a^2 \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}t - \frac{a^2}{4}\sin 2t =$$

$$= \frac{a^2}{2}t - \frac{a^2}{4} \cdot 2 \cdot \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

נציב חזרה:

$$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

השתמשנו פה במכנה משותף והכנסנו את ה-a^2.

מכפלה של פונקציות טריגונומטריות

$\sin(ax)\cos(bx)\,,\sin(ax)\sin(bx)\,,\cos(ax)\cos(bx)$

נשתמש בזהויות:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\ )$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

דוגמה

$$\int \sin 3x \cos 7x\, dx = \int \frac{1}{2}(\sin(10x) + \sin(-4x))\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\sin 10x\, dx + \int \frac{1}{2}\sin -4x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

מכפלת חזקה של סינוס עם חזקה של קוסינוס

m,n זוגיים שלמים חיוביים.

נשתמש בזהויות

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

תרגיל

חשבו את:

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx =$$

$$\int \cos^2 x \cos^2 x \sin^2 x \, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2x \, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{8}\sin^2 2x + \frac{1}{8}\cos 2x \sin^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\sin^2 2x + \frac{1}{8}\cos 2x \sin^2 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x \sin^2 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x$$

השלב האחרון – נעזרים בזה שהנגזרת של $\sin 2x$ היא $2\cos 2x$ ומציבים $u := \sin 2x$.

פתרון אינטגרלים באמצעות נוסחת נסיגה

בעזרת השיטה הנ"ל נמצא פתרון של אינסוף אינטגרלים.

נמצא סדרת פונקציות כאשר כל פונקציה בסדרה היא פתרון של אינטגרל.

נרשום את הסדרה באמצעות נוסחת נסיגה.

תרגיל

חשב את האינטגרל:

$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

$$I_1 = \arctan x$$

נחשב את הדבר הבא כאשר $n > 1$:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

נשים לב כי:

$$I_{n+1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx$$

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

$$v' := 1$$

$$v = x$$

$$u := \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

$$u' = \frac{-n \cdot 2x}{(x^2+1)^{n+1}}$$

נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

נשים לב כי מתקיים:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} = I_n - I_{n+1}$$

נציב חזרה:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - I_n$$

הפתרון הסופי:

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n, \qquad I_1 = \arctan x$$

האינטגרל המסוים של דרבו

f פונקציה חסומה בקטע סגור $[a,b]$.

T חלוקה של הקטע.

נסמן עבור חלוקה זו:

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$$

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$$

לכל $1 \le i \le n$.

--המחשה

נסמן:

$$\overline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

הסכום העליון של דרבו.

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

הסכום התחתון של דרבו.

שימו לב

לכל שתי חלוקות T_1, T_2 מתקיים $\overline{S}(T_1) \ge \underline{S}(T_2)$.

נסמן:

$$\overline{I} = \inf\{\overline{S}(T)\}$$

האינטגרל העליון של דרבו.

$$\underline{I} = \sup\{\underline{S}(T)\}$$

האינטגרל התחתון של דרבו.

מסקנה/תוצאה:

מתקיים:

$$\underline{I} \le I \le \overline{I}$$

וגם:

$$\underline{I} = \overline{I} = I$$

בשביל להוכיח אינטגרביליות, הרבה פעמים יהיה יותר קל לעבוד עם דרבו.

משפט

תהא f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$.

אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אמ"מ:

(1) f חסומה בקטע

(2) לכל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה T של $[a,b]$ עבורה מתקיים $\left|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \epsilon$.

<u>תרגיל</u>

קבעו האם הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית בקטע $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

<u>פתרון</u>

לא, הפונקציה לא חסומה ולכן לא אינטגרבילית.

<u>תרגיל</u>

הוכח על פי ההגדרה כי $f(x) = x$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ וחשב את $\int_0^1 x\,dx$.

<u>רעיון</u>

לרשום אוסף של חלוקות באמצעות n.

נסמן את סדרת החלוקות ב-T_n.

נוכיח ש-

$$\lim_{n\to\infty}\left|\overline{S}(T_n) - \underline{S}(T_n)\right| = 0$$

<u>תרגיל</u>

תהי g פונקציה רציפה אי שלילית בקטע $[a,b]$.

הראו כי אם $\int_a^b g\,dx = 0$, אז $g \equiv 0$.

<u>פתרון</u>

נניח שקיימת נקודה c כך ש $g(c) \neq 0$. הפונקציה אי שלילית, ולכן $g(c) > 0$.

מכיוון ש $g(x)$ רציפה קיים קטע $[x_1, x_2]$ שמכיל את הנקודה c ולכל $y \in [x_1, x_2]$ מתקיים $f(y) > 0$. פונקציה רציפה בקטע סגור $[x_1, x_2]$ מקבלת מינימום נסמן את הנקודה ב m.

נשים לב שבהכרח $m > 0$.

הפונקציה אי שלילית, ולכן עבור חלוקה T שכוללת את הקטע $[x_1, x_2]$ נקבל ש $\underline{S}(T) \geq m(x_2 - x_1) > 0$, ולכן $\sup \underline{S}(T) > 0$ בסתירה לכך ש $\int_a^b g\,dx = 0$.

<u>דוגמה – בלי התנאי לרציפות לא נוכל להוכיח</u>

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

הוכיחו ש-

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 0$$

<u>פתרון</u>
נתבונן בחלוקה:

$$T_n = \left[0,1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},3\right]$$

חילקנו את הקטע $[0,3]$ לשלושה חלקים - $\left[1+\frac{1}{n},3\right],\left[1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right],\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

חישוב האינטגרל העליון:

$$\overline{S}[T_n] = 0\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)+0\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\frac{4}{n}$$

$$\inf\left[\overline{S}(T_n)\right]=0$$

לכל חלוקה T מתקיים $\overline{S}(T_n)=0$, ז"א, משום ש-$0\le I\le\overline{S}(T_n)$ הוכחנו את הדרוש.