

טופולוגיה – 01/05 - 222 - 88 – סמסטר ב' תשע"ד

מבחן מועד א'

יום ב', כ"ג בתמוז תשע"ד, 21.7.14

מרצים: מיכאל מגרל, טל נוביק

הנחיות:

- א. אין להשתמש בכל חומר עזר.
  - ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. אם ענית על כל 5 השאלות, עליך לבטל אחת מהן בצורה ברורה, אחרת ייבדקו 4 השאלות הראשונות המופיעות במחברת.
  - ג. הניקוד על שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, אך הציון הסופי לא יעבור את 100.
  - ד. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.
  - ה. משך הבחינה שעתיים וחצי. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.
- שים לב: בזמן המבחן אסור שיהיה ברשותך טלפון נייד!

1. יהיו  $(M, d)$ ,  $(N, \rho)$  שני מרחבים מטריים, ותהי  $f: M \rightarrow N$ .

הראה ששתי ההגדרות הבאות לרציפות  $f$  שקולות:

א. לכל  $a \in M$  ולכל  $\varepsilon > 0$ , יש  $\delta > 0$  כך שלכל  $x \in M$  המקיים  $d(x, a) < \delta$  מתקיים  $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

ב. לכל  $U \subseteq N$  פתוחה ב  $N$ , מתקיים ש  $f^{-1}(U)$  פתוחה ב  $M$ .

2. א. יהי  $X$  מרחב טופולוגי האוסדורף, ותהי  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  סדרה של תתי מרחבים קומפקטיים לא ריקים

של  $X$  המקיימים  $E_{n+1} \subseteq E_n$  לכל  $n$ . הראה ש  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq \emptyset$ .

ב. תן דוגמה שבה  $E_n$  סגורות אך לא קומפקטיות, והמסקנה לא מתקיימת.

3. יהי  $X$  מרחב טופולוגי, ויהיו  $A, B \subseteq X$  שתי תתי קבוצות סגורות. הראה שאם  $A \cup B$  ו  $A \cap B$  קשירים, אז גם  $A$  ו  $B$  קשירים.

4. יהיו  $X_1, \dots, X_n$  מרחבים טופולוגיים, ונסמן ב  $p_k: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_k$  את ההטלות.

יהי  $Y$  מרחב טופולוגי ותהי  $f: Y \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$  פונקציה המקיימת ש  $p_k \circ f$  רציפה לכל  $1 \leq k \leq n$ . הראה ש  $f$  רציפה.

5. יהי  $X$  מרחב המנה של  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  המתקבל מיחס השקילות

הבא:  $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$  אם  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ .

הראה ש  $X$  הומאומורפי ל  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**שאלת בונוס (5 נקודות):** מצא מרחבים טופולוגיים  $X, Y$  שאינם הומאומורפיים זה לזה, אך קיימת פונקציה

רציפה  $f: X \rightarrow Y$  שהיא על, ופונקציה רציפה  $g: Y \rightarrow X$  שהיא על.

**בהצלחה!**

טופולוגיה – 01/05 - 222 - 88 – סמסטר ב' תשע"ד

מבחן מועד ב'

יום ב', י"ג באלול תשע"ד, 8.9.14

מרצים: מיכאל מגרל, טל נוביק

הנחיות:

- א. אין להשתמש בכל חומר עזר.
  - ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. אם ענית על כל 5 השאלות, עליך לבטל אחת מהן בצורה ברורה, אחרת ייבדקו 4 השאלות הראשונות המופיעות במחברת.
  - ג. הניקוד על שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, אך הציון הסופי לא יעבור את 100.
  - ד. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.
  - ה. משך הבחינה שעתיים וחצי. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.
- שים לב: בזמן המבחן אסור שיהיה ברשותך טלפון נייד!

1. יהי  $M$  מרחב מטרי, ותהי  $A \subseteq M$  תת קבוצה סגורה. הראה שקיימת סדרת קבוצות פתוחות  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ב

$$M \text{ המקיימת } U_{n+1} \subseteq U_n \text{ לכל } n, \text{ ו- } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = A.$$

2. יהי  $X$  מרחב טופולוגי, ויהיו  $S_1, \dots, S_n \subseteq X$  קבוצות סגורות המכסות את  $X$  כלומר

$$S_1 \cup \dots \cup S_n = X \text{ יהי } Y \text{ מרחב טופולוגי ותהי } f: X \rightarrow Y \text{ פונקציה המקיימת ש}$$

$$f|_{S_i}: S_i \rightarrow Y \text{ רציפה לכל } 1 \leq i \leq n. \text{ הראה ש } f \text{ רציפה.}$$

3. א. יהי  $X$  מרחב טופולוגי קשיר מסילתית ו  $Y$  מרחב טופולוגי כלשהו. נניח שקיימת פונקציה רציפה

$$f: X \rightarrow Y \text{ שהיא על } Y. \text{ הראה שגם } Y \text{ קשיר מסילתית.}$$

ב. האם במקרה זה  $Y$  הוא בהכרח קשיר?

4. א. יהי  $X$  מרחב טופולוגי האוסדורף, ויהיו  $A, B \subseteq X$  שני תתי מרחבים קומפקטיים וזרים. הראה

$$\text{שקיימות תתי קבוצות } U, V \subseteq X \text{ פתוחות וזרות, כך ש } A \subseteq U, B \subseteq V.$$

ב. הסק שמרחב טופולוגי האוסדורף קומפקטי הוא  $T_4$ .

5. יהי  $X$  מרחב המנה של  $\mathbb{R}$  המתקבל מזיהוי זו לזו של כל הנקודות  $x \in \mathbb{R}$  כך ש  $|x| \geq 1$ .

כלומר, יחס השקילות המגדיר את  $X$  הוא  $x \sim y$  אם  $x = y$  או  $|x| \geq 1$  וגם  $|y| \geq 1$ .

$$\text{הראה ש } X \text{ הומאומורפי למעגל } S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

שאלת בונוס (5 נקודות): מצא מרחב טופולוגי  $X$  ופונקציה רציפה  $f: [0, \infty) \rightarrow X$  כך ש  $f$  לא פתוחה ולא סגורה.

**בהצלחה!**