

משפט ברוסוק-אולם ובעיית המחרוזות

מספרו של פרופסור רון אהרוני, "מתמטיקה שירה ויופי"

12 במאי 2015

המתמטיקאי הפולני סטניסלב אולם (*Ulam*) ניסח השערה, שהוכחה על ידי ברוסוק (*Borsuk*).

ננסח תחילה את ההשערה על דרך הדוגמה:

בכל רגע נתון קיימות על קו המשווה שתי נקודות אנטיפודיות (כלומר שנמצאות זו מול זו) שבהן נמדדת בדיוק אותה טמפרטורה.

"קו המשווה" הוא רק משל - אפשר לקחת במקומו כל מעגל, וכך גם הטמפרטורה - במקומה אפשר לקחת כל משתנה רציף.

זו הייתה דוגמה למקרה החד-מימדי של משפט ברוסוק-אולם. דוגמה למקרה הדו-מימדי תהיה:

בכל רגע נתון יש על פני כדור הארץ שתי נקודות אנטיפודיות שבהן בדיוק אותה טמפרטורה ואותו אחוז לחות.

כלומר, אם על פניו של כדור נמדדים שני משתנים רציפים, קיימות שתי נקודות אנטיפודיות שבהן שני הפרמטרים שווים.

באופן כללי, כל פונקציה רציפה מהספירה ה- n מימדית $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ למרחב האוקלידי ה- n מימדי מעתיקה שתי נקודות אנטיפודיות לאותה נקודה.

נתאר את ההוכחה במקרה החד-מימדי.

נסתכל על המעגל כעל קו המשווה, ועל שתי נקודות אנטיפודיות. נניח שהפרש הטמפרטורות בין הנקודות הוא a . אם $a = 0$, סיימנו.

באופן גיאומטרי, נסתכל על חץ שראשו בנקודה אחת וקצהו בנקודה השנייה. נסובב את החץ ב-180 מעלות. כעת, הנקודות החליפו מקומות על החץ, וההפרש בטמפרטורות יהיה $-a$. ההפרש איפה שינה סימן. מכיוון שאנו מניחים שטמפרטורה היא משתנה רציף, לפי משפט ערך הביניים ההפרש חייב להיות שווה ל-0 באיזשהו מצב של החץ.

אם ההפרש שווה ל-0 במצב מסוים של החץ, סימן שבמצב זה הטמפרטורה בשתי הנקודות האנטיפודיות שווה.

שימוש לבעיית המחרוזת:

נתבונן בבעיה הבאה:

שני גנבים גנבו מחרוזת. המחרוזת פתוחה, כלומר ישרה ולא מעגלית. במחרוזת שזורים חרוזים מסוגים שונים, כאשר מכל סוג יש מספר זוגי של חרוזים. הגנבים רוצים לחלק את השלל שווה בשווה, קרי שכל אחד יקבל את אותו מספר חרוזים מכל סוג.

לשם כך, עליהם כמובן לחתוך את המחרוזת. כל חיתוך, מאידך גיסא, מפחית את ערכה של המחרוזת ולכן הם מעוניינים לחתוך את המחרוזת כמה שפחות. מהו מספר החיתוכים המינימלי שישביע את רצונם של הגנבים? פרופסור נוגה אלון השתמש במשפט בורסוק אולם כדי להוכיח את המשפט הבא:

אפשר להסתפק במספר חיתוכים שהוא כמספר סוגי החרוזים.

חשבו מה קורה כאשר יש רק סוג אחד של חרוזים - מספיק לחתוך את המחרוזת פעם אחת, באמצעה. למקרה זה לא צריך את משפט בורסוק אולם. גם למקרה של שני סוגים אפשר להסתדר בלעדיו, אך משלושה סוגים ואילך - ההוכחה היחידה המוכרת משתמשת במשפט בורסוק אולם.