<u>חורף 2015</u>, <u>מועד ד'</u>, <u>שאלה 3</u>

סדרה בינארית $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$

$001101\ldots$

א. A = הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את הרצף 01

$|A| \overset{?}{=} \aleph_0$

אם $f(i)=0$ אז לכל $j\ge i$, $f(j)=0$

לכן אם: ($f,g\in A$ עבור)

$$\min_{n\in\mathbb{N}}\{f(n)=0\} = \min_{n\in\mathbb{N}}\{g(n)=0\}$$

אז $f=g$, מכיוון ש-

$f(i)=g(i)=1$ $\quad\forall i<n$

$f(i)=g(i)=0$ $\quad\forall i\ge n$

ולכן הפונקציה:

$$F:A\setminus\{'1'\}\longrightarrow\mathbb{N}$$

$$F(f)=\min_{n\in\mathbb{N}}\{f(n)=0\}$$

<u>תיקון</u>. הוא גם <u>על</u> כי עבור $n\in\mathbb{N}$ נקבל:

$f = \quad 1\cdots1\,0\ldots$

$\overbrace{\quad}^{n-1}$ פעמים $\uparrow$ n
($n-1=0$ אינדקס)

לכן $F(f)=n$.

מתקיים: $\aleph_0 = |A \setminus \{'1'\}|$

לכן גם: $\aleph_0 = |A|$.

ב. B = הסדרות הבינאריות שאינן מכילות רצף 00 של

$B = \{ f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ f(n)=0 \to f(n+1)=1 \}$

נסמן את קבוצת המספרים האי-זוגיים ב- $\mathcal{O}$

$\mathcal{O} = \{1,3,5,7,9,11,\ldots\}$

נגדיר פונקציה חח"ע:

$F : \overbrace{\{0,1\}^{\mathcal{O}}}^{f \in} \longrightarrow \underset{\in}{B}$

$F(f) \qquad F(f)$

$\underset{1}{\underline{0}}\ \underset{2}{\underline{1}}\ \underset{3}{\underline{1}}\ \underset{4}{\underline{1}}\ \underset{5}{\underline{\quad}}\ \underset{6}{\underline{\quad}}\ \underset{7}{\underline{\quad}} \ldots$

כלומר:

$F(f) : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$

$F(f):\mathbb{N}\to\{0,1\}$

המוגדרת לפי:

$$\big(F(f)\big)(n)=\begin{cases}1 & ,n=2m\\ f(n) & ,n=2m-1\end{cases}$$

נראה כי F חח"ע: אם $F(f)=F(g)$ אזי

לכל $n\in O$ מתקיים:

$$\underbrace{\big(F(f)\big)(n)}_{=f(n)}=\underbrace{\big(F(g)\big)(n)}_{=g(n)}$$

לכן $f=g$.

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{0}{7}\quad\frac{1}{8}\quad\frac{0}{9}\quad\dots$$

צריך להצדיק כי אכן $F(f)\in B$.

יהי $n\in\mathbb{N}$, אם:

$$\big(F(f)\big)(n)=0$$
$$\Downarrow$$
$$\big(F(f)\big)(n+1)=1$$

אם אכן $\big(F(f)\big)(n)=0$ פירושו ש-n אי-זוגי, לכן $n+1$ זוגי, ולכן $\big(F(f)\big)(n+1)=1$ כנדרש.

סה״כ, קיבלנו פונק׳.. חח״ע.

$$F: \{0,1\}^{\Theta} \longrightarrow B$$

לכן:

$$|\{0,1\}^{\Theta}| \leq |B|$$

$$2^{\aleph_0} = 2^{|\Theta|}$$

למעשה,

$$B \subseteq \underbrace{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}_{2^{\aleph_0}}$$

שעוצמתה

ולכן מקנטור-שרדר-ברנשטיין:

$$|B| = 2^{\aleph_0}$$

ג. $C =$ סדרות שאינן מכילות 00 וגם 11.

$$|C| = 2$$

$$C = \{010101\ldots,\ 101010\ldots\}$$

תהי $f \in C$. אם $f(1)=0$ אז:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n \text{ odd} \\ 1 & , n \text{ even} \end{cases}$$

[[illegible] f n.]

אם $f(1)=1$ אז:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ odd} \\ 0, & n \text{ even} \end{cases}$$

[קונקרטית של n.]

$$\aleph = |\mathbb{R}| = |(0,1)|$$

$$F : \{1,2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow (0,1)$$

$$F(\overset{\in}{f}) = 0.f(1)f(2)f(3)\cdots$$

$$(0.11212212\ldots)$$

$$2^{\aleph_0} \le \aleph$$

$$G : \underbrace{(0,1)}_{r} \longrightarrow \{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$$

9 מחזורי פחות משלון:

$$r = 0.r_1 r_2 r_3 \cdots \qquad \begin{cases} 0.1999\ldots \\ 0.2000 \end{cases}$$

$$\big(G(r)\big)(n) = r_n$$

אכן: $\aleph \le 10^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

<u>רגע, קצת מנות, תרגיל 2</u>

S יחס על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$fSg \iff \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$$

א. [יח"ש S]

ב. $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, מצאו $|[f]_S|$.

$$fSg \iff \exists h:\mathbb{R}\to\mathbb{Z} : f=g+h$$

$$\left(h(x):=f(x)-g(x)\ .\ \right)$$

לכן יש לנו פונקציה חח"ע ועל:

$$\varphi : \underset{\psi}{[f]_S} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$$

$$\varphi(g) := f-g$$

ברור כי $\varphi(g)\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המוגדרת היטב.

לקחנו $g\in[f]_S$, לכן fSg $\forall x\in\mathbb{R}$, $\underline{f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}}$

מכאן ש-$\varphi(g)\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$.

. . .

<u>φ חח"ע</u>: אם $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$

$$\underset{f-g_1}{\varphi(g_1)} = \underset{f-g_2}{\varphi(g_2)}$$

אזי $g_1(x) = g_2(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

כלומר: $g_1 = g_2$.

<u>φ על</u>: תהי $h \in \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$. נגדיר:

$$g(x) := f(x) - h(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

מתקיים: $\varphi(g) = f-g = f-(f-h) = h$

וגם: $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-g(x) = h(x) \in \mathbb{Z}$

כלומר $g \in [f]_S$.

סה"כ, קיבלנו פונקציה חח"ע ועל: $\varphi:[f]_S \to \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$

ולכן: $|[f]_S| = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph}$.

$$\left(2^{\aleph} \le \aleph_0^{\aleph} \le \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = 2^{\aleph}\right)$$

3. מה עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|$?

ראינו קודם כי $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S| \le$

$$|\mathbb{R}/S| = 2^{\aleph}$$

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$$

נראה כי: $2^{\aleph} \le |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|$.

$$\psi : \{0, \tfrac{1}{2}\}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S$$

אם נצליח למצוא ψ חח"ע כזו אז מק-ש-ב סיימנו.

אכן, נגדיר:

$$\underset{\{0,\frac{1}{2}\}^{\mathbb{R}}}{\psi(\underset{\cap}{f})} = [f]_S$$

נניח כי: $\psi(f)=\psi(g)$, אזי $[f]_S=[g]_S$

כלומר: $f\,S\,g$, לכן, לכל $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-g(x) \in \mathbb{Z}$$

אבל שים לב, $f,g\in\{0,\frac{1}{2}\}^{\mathbb{R}}$ לכן $f(x)-g(x)$

תמיד $\in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\} \Rightarrow$ לכן $0 \in \mathbb{Z}$!

לכן, לכל $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-g(x)=0$

$$f(x)=g(x)$$

ולכן $f=g$, כלומר ψ חח"ע.

מקנטור-שרדר-ברנשטיין, סיימנו: $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\right| = 2^{\aleph}$

<u>תשע"ט, מועד א', 2ב'</u>

נחשב את עוצמת הקבוצה:

$$A=\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f^{-1}[\{1\}]=f^{-1}[\{2\}]\}$$

(סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$)

ברור כי:

$$A\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

$$|A|\le \aleph_0^{\aleph_0}=\aleph$$

מצד שני:

$$\{3,4\}^{\mathbb{N}}\subseteq A$$

כי אם $f:\mathbb{N}\to\{3,4\}$ אז:

$$f^{-1}[\{1\}]=\emptyset=f^{-1}[\{2\}]$$

לכן $\aleph = 2^{\aleph_0} \le |A|$

עפ״י משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, $|A| = \aleph$.

<u>2018</u>, <u>מועד ב׳</u>, <u>שאלה 3</u>

א. $|A| \lneq |P(A)|$ (משפט קנטור)

(1) $|A| \le |P(A)|$

$$\left[\begin{array}{l} f: A \longrightarrow P(A) \\ f(a) = \{a\} \end{array}\right]$$

(2) $|A| \ne |P(A)|$

[נניח בש״ל כי קיימת פונקציה <u>על</u> $g: A \to P(A)$]

$$D = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

מאחר ו-g על, לכן יש $b \in A$: $g(b) = D$

מפרקים למקרים $b \in D$ [ומקבלים סתירה בכל מקרה.]

ב. A, B

$$|A \setminus B| \le |P(A) \setminus P(B)|$$

[אם $A\setminus B=\emptyset$ אז זה ברור $(0=$ מינימום$)$]

אחרת, נגדיר: $f: A\setminus B \to \underbrace{P(A)\setminus P(B)}$

$$f(a)=\{a\}$$

מדוע f מוגדרת היטב? כי אם $a\in A\setminus B$ אז

ברור כי $\{a\}\in P(A)$ וגם $\{a\}\notin P(B)$

$\left(\begin{array}{r} \{a\}\not\subseteq B \text{ כי} \\ a\notin B \text{ שהרי} \end{array}\right)$

ברור כי f חח"ע, מסקנה:

$$|A\setminus B|\le|P(A)\setminus P(B)|.$$

הערה:

$$\underline{P(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\}\subseteq P(A)\setminus P(B)}.$$

$$X\in P(A)\Leftarrow X\subseteq A \Leftarrow X\subseteq A\setminus B$$

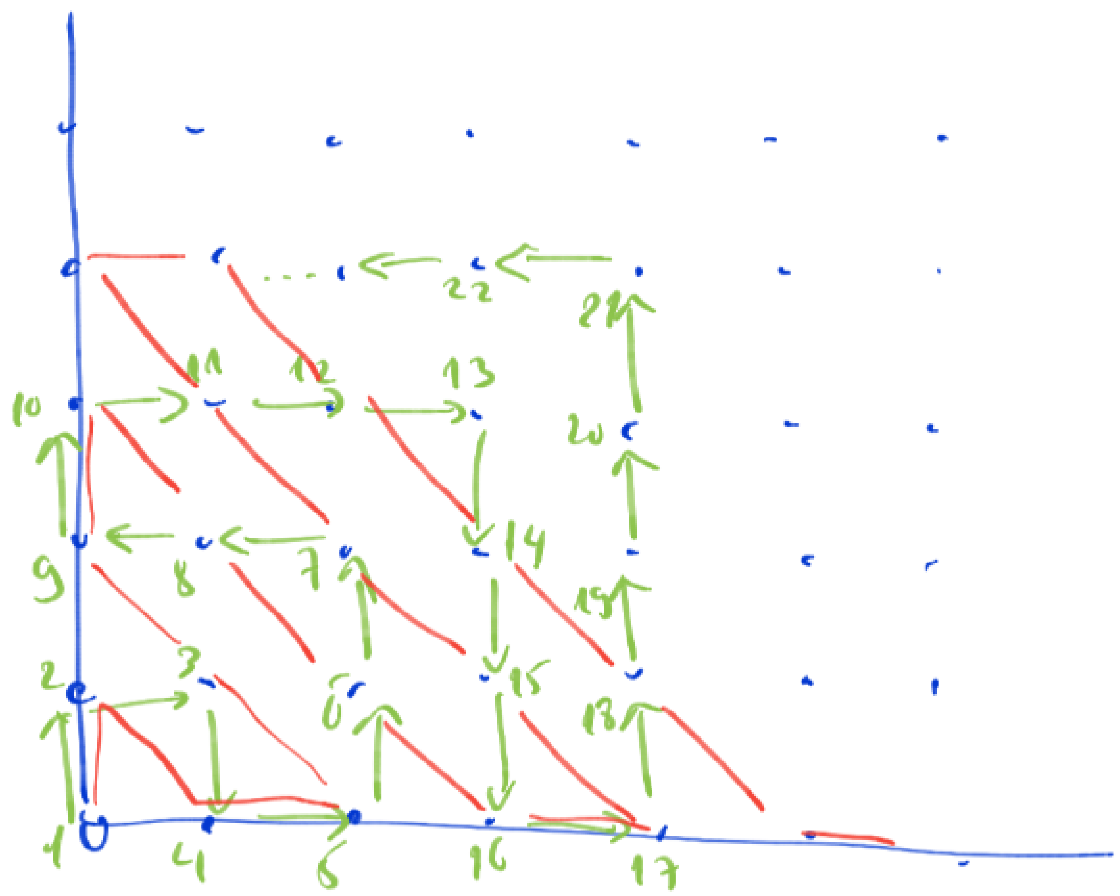
$$\Leftarrow X\neq\emptyset$$

$X\not\subseteq B$ וגם $\exists x\in X$

$X\notin P(B)$ $\quad$ $x\in A\setminus B$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$



משפט, חלק ב', שאלה 4

ק - כל נקודת שבת

$$\psi : P(A) \longrightarrow P(A)$$

$$\psi(X)\subseteq\psi(Y)\quad \forall\, X\subseteq Y$$

$$\Rightarrow \exists\, C\subseteq A:\ \psi(C)=C$$

ב׳ - נ״ע כי $\psi: P(A)\to P(A)$

(1) $\psi(A)\neq A$

(2) $\forall X\subseteq A,\quad X\cup\psi(\psi(X))=A$

ג: הוכחנו כי $\exists X,Y\subseteq A$: $X\subseteq Y$ אך $\psi(X)\nsubseteq\psi(Y)$

נ״ח בשלילה כי ψ שומרת הכלה.

מסעיף א׳ (לפי משפט טרסקי) $\exists\, C\subseteq A$:

$$\psi(C)=C$$

מנתון (2):

$$C\cup\psi(\underbrace{\psi(C)}_{C})=A$$

$$C\cup\underbrace{\psi(C)}_{C}=A$$

קיבלנו $C=A$.

לכן: $\psi(A)=\psi(C)=C=A$

בסתירה לנתון (1): $\psi(A)\neq A$.

2014, מאי ב׳, ג1

סדרה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ של מס׳ ממשיים

מחזורית אם $\exists k\in\mathbb{N}: a_n=a_{n+k}$
$\forall n\in\mathbb{N}$

נסמן את קב׳ הסדרות המחזוריות P.

מצאו את עוצמתה.

$$\underline{|P|=\aleph}$$

$$P\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|=\aleph^{\aleph_0}=\aleph$$

מצד שני: ישנה פונק׳ חח״ע $f:\mathbb{R}\longrightarrow P$

$$f(r)=(r,r,r,\dots)$$

לכן: $\aleph=|\mathbb{R}|\le|P|$

סה״כ: $|P|=\aleph$ (לפי קנטור-שרדר-ברנשטיין).

שנה, מועד ב׳, 1

(נניח $X = A \cup B \cup C$ קל אינטואיטיבי-.)

ב) A, B, C קב׳:

$$A \cap (B \setminus C) \overset{?}{=} (A \cap B) \setminus C$$

$$A \cap (B \cap C^c) \overset{?}{=} (A \cap B) \cap C^c$$

חיתוך קל הוא אסוציאטיבי.

תרגיל: (מבחן אלגוריתמי)

אם $|X| = a$

ויהי R יחס על X כך ש- $|[x]_R| \leq b$.

אם $\boxed{b < a}$ אז $|X/R| = a$.

הוכחה: ברור $|X/R| \leq a$.

נניח שלא אז: $c := |X/R| \lneqq a$

משפט המכפלה

$$a = |X| \leq c \cdot b \leq \max\{b, c\} \lneqq a$$

מסקנה:

תהי B קבוצה מעוצמה b.

$$\boxed{f: X \to X/R \times B}$$

לכל מחלקה $[y]_R \in X/R$ נקבע פונק' חח"ע:

$$g_{[y]_R}: [y]_R \to B$$

מדוע? כי נתון $|[y]_R| \le b = |B|$.

נגדיר:

$$f(x) = \left([x]_R, g_{[x]_R}(x)\right)$$

אם $f(x)=f(y)$ אז $[x]_R = [y]_R$

כלומר $x,y \in [x]_R$, וכן $g_{[x]_R}: [x]_R \to B$ חח"ע

ולכן: $g_{[x]_R}(x) = g_{[y]_R}(y) = g_{[x]_R}(y)$

$$\Downarrow$$

$x=y$, לכן f חח"ע.

$$f: X \to X/R \times B$$

$$a \leq c \cdot b = \max\{b, c\}$$

$$F(x) = \big(\underbrace{[x]_R}_{}\,,\ \underbrace{g_{[x]_R}(x)}_{}\big)$$

61 ,ד' מרץ ,2014

על $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ יחס $\sim$ נג'

$$a \sim b \iff \frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2} \quad \left(\exists\, c,d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0\right)$$

.1 [יח"ש $\sim$]

.2 יהי $a \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

(*) $\left|[a]_\sim\right| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

(*) $\aleph_0 \leq \left|[a]_\sim\right|$ וגם ברור ש:

$$\aleph_0 \overset{\text{כי}}{\longleftarrow} \mathbb{N} \longleftrightarrow \{a, 4a, 9a, 16a, 25a, \dots\} \subseteq [a]_\sim$$

$n \longmapsto a \cdot n^2$

לכן $\Rightarrow \left|[a]_\sim\right| = \aleph_0$.

.3

$$\boxed{\left|\mathbb{Q}\setminus\{0\}/\sim\right| \leq \aleph_0}$$

$$\{[2]_\sim, [3]_\sim, [5]_\sim, \dots\}$$

$a, b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$: ב-5 ולכן

$a \sim b \iff \frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2} \quad \exists c,d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0$

רפלקסיביות:

$a \sim a \iff \underset{1}{\frac{a}{a}} = \frac{1^2}{1^2}$

סימטריה, טרנזיטיביות -

$p \neq q$ ראשוניים

$\frac{p}{q} = \frac{c^2}{d^2}$ של שלמים $\quad c,d \in \mathbb{Z}$ זרים

(*) $p \cdot d^2 = q \cdot c^2$

נפרק את שני האגפים לגורמים ראשוניים

מכיוון שזוגיים ש-q מחלק את צד ימין ולכן

את צד שמאל, $q \neq p$ ולכן d מחולק ב-q.

$\exists m \in \mathbb{Z}: \quad d = q \cdot m$

ולכן: $\quad d^2 = q^2 \cdot m^2$

נציב ב-(*):

$p \cdot q^2 \cdot m^2 = q \cdot c^2$

$$p \cdot \underbrace{q \cdots}_{d^2} = q \cdot c$$

נצמצם q:

$$p \cdot q \cdot m^2 = c^2$$

מסקנה: q מחלק את c^2 ולכן את c

סה"כ, q מחלק גם את d וגם את c, סתירה לכך שמדובר בשבר מצומצם.

מסקנה: p, q אינם שקולים, כלומר המספרים הראשוניים (יש ∞ כאלו) מהווים $\aleph_0$ יחסים שונות זו מזו, דהיינו:

$$\aleph_0 \le \left| \mathbb{Q}\setminus\{0\} / \sim \right|$$

$$c = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$$

$$c^2 = p_1^{2k_1} \cdots p_n^{2k_n}$$

מחלקה S_2 -ו: סימטרי:

$$a \sim b \Rightarrow \exists\, c, d \neq 0 : \quad \frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d^2}{c^2} \Rightarrow b \sim a$$

טרנזיטיביות:

$c, d, e, f \in \mathbb{Z}$

$$x \sim y, \quad y \sim z$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{x}{y} = \frac{c^2}{d^2} \qquad \frac{y}{z} = \frac{e^2}{f^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{c^2 e^2}{d^2 f^2} = \frac{(ce)^2}{(df)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \sim z$$
