7.11 תרגיל. יהיו $U,V\subseteq\mathbb{R}_3[x]$ התת-מרחבים הבאים:

$U:=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\ :\ p(0)=p(1)=0\},\ \ V:=\text{span}\{x^2-x,1+x\}$.

א. מצא בסיס ל $\text{span}(U\cup V)$.

ב. הוכח ש $U\cup V$ **אינו תת-מרחב של** $\mathbb{R}_3[x]$.

<u>פתרון</u>

א. כל איבר ב U ניתן להציג באופן הבא: $p(x)=x(x-1)(ax+b)=ax^3+(b-a)x^2-bx$

לכן (במלים אחרות) אלה הם הפולינומים ב $p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in\mathbb{R}_3[x]$

שמקדמיהם מקיימים את התנאים $a_0=0, a_2=-a_1-a_3$. אם נסתכל על הפולינומים כוקטורים (לפי המקדמים שלהם) נקבל שאיברי U הם:

$$\begin{pmatrix}a_3\\-a_1-a_3\\a_1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-a_1\\a_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_3\\-a_3\\0\\0\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$ ז"א

$$U=span\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\left(=span\left\{-x^2+x,x^3-x^2\right\}\right).$$

מצד שני נתון $V=span\left\{x^2-x,1+x\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

לכן $span(U\cup V)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

על מנת למצוא בסיס נבנה מטריצה שוקטורים אלה הם שורותיה ונדרג. השורות השונות מאפס שיישארו יהיו בסיס.

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4=R_4+R_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ קיבלנו ש

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\left(=\left\{1+x,-x^2+x,x^3-x^2\right\}\right)$$ בסיס ל $span(U\cup V)$.

ב. ראיתם כבר ש $U \cup V \leq \mathbb{R}_3[x] \Leftrightarrow V \subseteq U$ או $V \supseteq U$. ברור שאחד לא מכיל את השני מכיוון ש $1+x \notin U$ (לא "נצליח" ליצור את 1 ע"י איברי U) וכן $x^3 - x^2 \notin V$ (לא "נצליח" ליצור את x^3 ע"י איברי V).