ספר מומלץ נוסף:

C. Adams and R. Franzosa, **Introduction to Topology: Pure and Applied, 2008**
מלבד חומר מעניין על טופולוגיה אפשר למצוא בספר זה גם תאור ידידותי מאוד של אישומים של טופולוגיה בתחומים שונים: כלכלה, תורת המשחקים, פיזיקה וכולי.

תרגילים (מסוימים ששאלנו בהרצאות)

תרגיל: "בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמ"מ (X,d):

א) כל קבוצה סגורה היא G_δ.

ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

פתרון: א. לכל קבוצה סגורה A במ"מ (X,d) יש פונקציה רציפה

$$f_A : X \to [0,\infty) \quad f_A(x) = d(x,A)$$

כך ש $f_A^{-1}(0) = A$. כעת נגדיר $O_n := f^{-1}[0,\frac{1}{n})$. אז $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

ב. נובע מחלק א (משלים וכללי de Morgan)

☺

תרגיל: הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ (עם מטריקה p–אדית) הוא לא קשיר לחלוטין.

פתרון: $(\mathbb{Z},d_p)$ האוסדורפי. מ"ל שהוא בעל מימד 0. כדורים פתוחים מרכיבים בסיס בכל מ"מ.

מ"ל כל כדור של $(\mathbb{Z},d_p)$ הוא קבוצה סגוחה.

במרחב מטרי $(\mathbb{Z},d_p)$ כל המרחקים החיוביים הם מהצורה $\frac{1}{p^m}$ $(m\in\{0,1,\cdots\})$. לכן

מתקיים שוויון $B_r(\mathrm{u}) = B_{\frac{1}{p^m}}[\mathrm{u}] \quad \forall\ \frac{1}{p^m} < r \le \frac{1}{p^{m-1}}$

כל כדור פתוח במרחב זה הוא בעצם גם כדור סגור.

☺

__תרגיל__: הוכיחו שכל הכדורים (פתוחים וסגורים) ב $(\mathbb{Z},d_p)$ הם הומיאומורפיים.

פתרון: קודם כל טענת עזר: $\mathrm{f}_a(\mathrm{x})=a\mathrm{x} \quad (\mathbb{Z},d_p)\to(\mathbb{Z},d_p)$ רציפה לכל $a\in\mathbb{Z}$.

הפונקציה היא גם חח"ע לכל $0\neq a\in\mathbb{Z}$.

רציפות נובעת מ $\mathrm{d}_p(a\mathrm{x},a\mathrm{y})\le \mathrm{d}_p(\mathrm{x},\mathrm{y})$

(זה נכון כי $p^k\,|\,(x-y)\ \Rightarrow\ p^k\,|\,(ax-ay)$)

נגדיר פונקציה $\mathrm{f}_{\mathrm{p}^m}(\mathrm{x})=\mathrm{p}^m\mathrm{x} \quad \mathrm{f}_{\mathrm{p}^m}:(\mathbb{Z},d_p)\to(\mathbb{Z},d_p)$. אז היא חח"ע ורציפה. התמונה היא כדור סגור הבא $\mathrm{f}(\mathbb{Z})=p^m\mathbb{Z}=\mathrm{B}_{\frac{1}{p^m}}[0]$. פונקציה הפכית $x\mapsto \frac{x}{p^m} \quad \mathrm{f}_{p^m}{}^{-1}:\mathrm{B}_{\frac{1}{p^m}}[0]\to\mathbb{Z}$ מוגדרת היטב וגם רציפה

(הפעם שימו לב $\mathrm{d}_p(\tfrac{1}{p^m}\mathrm{x},\tfrac{1}{p^m}\mathrm{y})\le p^m\cdot \mathrm{d}_p(\mathrm{x},\mathrm{y}) \quad \forall \mathrm{x},\mathrm{y}\in p^m\mathbb{Z}$).

נזכיר ש $\mathbb{Z}=B_1[0]$. לכן בשלב זה אפשר לסכם שכל כדורים הסגורים עם מרכז ב 0 הם הומיאומורפיים (ל $(\mathbb{Z},d_p)$).

כעת מספיק להוכיח שהזזות $\mathrm{T}_u(x)=u+x \quad \mathrm{T}_u:(\mathbb{Z},d_p)\to(\mathbb{Z},d_p)$

הן איזומטריות (ולכן גם הומיאומורפיזמים) ומתקיים $\mathrm{T}_u(B_r[0])=B_r[\mathrm{u}]$.

☺

תרגיל: א. למיין קטעים שהם יותר מנקודון ב $\mathbb{R}$ עד כדי הומיאומורפיזמים.

ב. מתי קיימת פונקציה רציפה __ועל__ בין הקטעים הנ"ל ?

פתרון: א. יש שלוש מחלקות קטעים עד כדי הומיאומורפיזמים:

$$\mathbb{R}\simeq(a,b)\simeq(a,\infty)\simeq(-\infty,b) \qquad (\mathrm{A})$$

$$[a,b)\simeq(c,d]\simeq[a,\infty)\simeq(-\infty,b] \qquad (\mathrm{B})$$

$$[a,b] \qquad (\mathrm{C})$$

ב. בגלל חלק א מספיק לבדוק רק 3 נציגים של המחלקות הנ"ל מחלק א

באופן סמלי התשובה היא: $(A)\rightleftarrows(\mathrm{B})\to(C)$

יחסית קל למצוא פונקציות רציפות על $(A)\to(\mathrm{B})\to(C)$.

למשל: $\mathrm{f(x)}=\begin{cases}2^x & x\le 0\\ 1 & 0\le x\end{cases}$ $\quad \mathbb{R}\to(0,1] \qquad (A)\to(\mathrm{B})$

$\mathrm{f(x)}=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & 0\le x\end{cases}$ $\quad (-\infty,1]\to[0,1] \qquad (\mathrm{B})\to(\mathrm{C})$

מקרה של $(\mathrm{B})\to(\mathrm{A})$ הוא הרבה פחות קל. אפשר למשל לבחור פונקציה הבאה

$$\mathrm{f}:(0,1]\to\mathbb{R} \quad f(x)=\tfrac{1}{x}\sin(\tfrac{1}{x})$$

☺

<u>תרגיל</u>: כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

א) $X = 8$

ב) $X=(0,1)\cup(2,4)\cup\{7\}$

תשובה:

א) 2 מסלולים. אחד חד-איברי $[a]=\{a\}$ (נקודת ההשקה של שני מעגלים).

קחו בחשבון שסימטריה לגבי נקודת a מגדיר הומיאומורפיזם ....

ב) 2 מסלולים. אחד חד-איברי $[7]=\{7\}$ (נקודת מבודדת <u>יחידה</u> במרחב).

קיים הומיאומורפיזם $\mathrm{h}:(0,1)\to(2,4)$ מגדיר הומיאומורפיזם

$\mathrm{f(x)}=\mathrm{h(x)}\ \forall\,\mathrm{x}\in(0,1),\ \mathrm{f(x)}=\mathrm{h}^{-1}(x)\ \forall\,\mathrm{x}\in(2,4),\ \mathrm{f(7)}=7 \quad f:X\to X,$.

קחו בחשבון $(0,1),\ (2,4)$ מרחבים הומוגניים (כל אחד הומאומורפי ל $\mathbb{R}$).

☺

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שכל חבורה טופולוגית $(G,\tau,\cdot)$ היא הומוגנית.

פתרון: לכל $a\in G$ מוגדרת הזזה $T_a(x)=ax \quad T_a:G\to G$. היא רציפה כי

אפשר להציג אותה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות (שיכון ומכפלה)

$$G \to G \times G \to G \quad x \mapsto (a,x) \mapsto ax$$

כל הזזה חח"ע ועל. ההופכי של $T_a : G \to G$ הוא $T_{a^{-1}} : G \to G$. שהוא גם רציף. לכן כל הזזה בעצם הומיאומורפיזם.

לכל שתי נקודות $x, y \in G$ מתקיים $T_a(x) = y$ עבור $a = yx^{-1}$.

☺

<u>תרגיל:</u> נניח $\bar{Y} = X$ (ז"א Y צפופה ב X –). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

פתרון: נניח בשלילה ש X לא קשיר. אז יש פירוק טופולוגי

$$X = X_1 \cup X_2 \quad X_1 \cap X_2 = \varnothing \quad X_1 \neq \varnothing \quad X_2 \neq \varnothing \quad X_1, X_2 \in \tau$$

נתון ש Y צפופה ב X. לכן Y פוגש כל תת רבוצה פתוחה לא ריקה ב X. בין היתר $Y \cap X_1 \neq \varnothing, \quad Y \cap X_2 \neq \varnothing$. אז נקבל פירוק טופולוגי של Y

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \quad Y_1 \cap Y_2 = \varnothing \quad Y_1 \neq \varnothing \quad Y_2 \neq \varnothing \quad Y_1, Y_2 \in \tau_Y$$

סתירה לנתון $Y \in Conn$.

☺

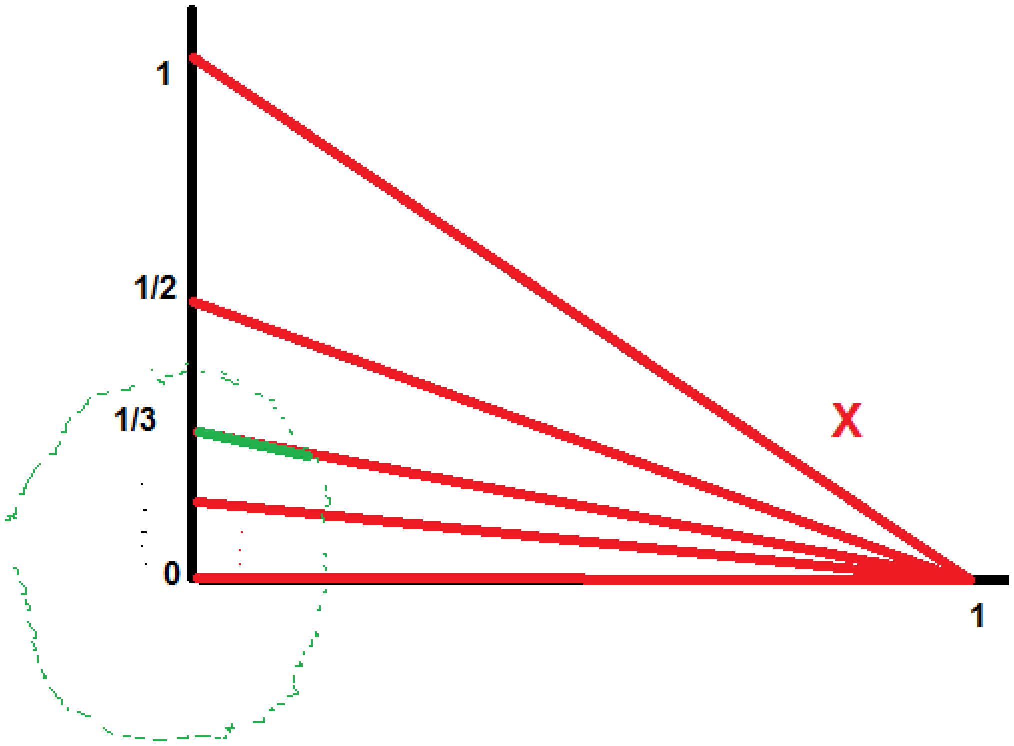
תרגיל:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

פתרון: א. שימוש במשפט: כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכדור פתוח שלו.

ב. פרטים בקובץ http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TopEx20.pdf



☺

תרגיל: נניח (X,d) מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $a,b \in X$ כך ש –

$$diam(X) = d(a,b)$$

פתרון: $X \times X \in Comp$ (מכפלה שומרת על קומפקטיות)

ו $d : X \times X \to [0,\infty)$ רציפה כי היא פונקציית ליפשיץ כי

$$|d(x_1,x_2) - d(y_1,y_2)| \le d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2)$$

קחו בחשבון ש $d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2)$ מגדירה מטריקה מתאימה לטופולוגיה של $X \times X$.

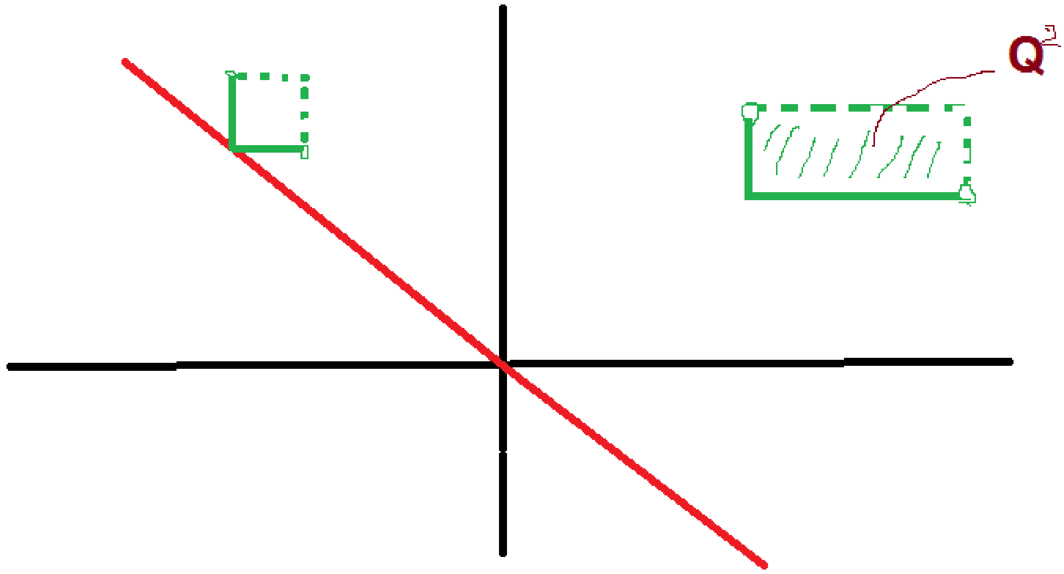
כעת לפי משפט Weierstrass מתקבל המקסימום

$$\mathrm{diam(X)} = \sup\{d(x,y) : \mathrm{x,y} \in \mathrm{X}\} = \sup \mathrm{d} = \max\{d(x,y) : \mathrm{x,y} \in \mathrm{X}\}$$

☺

<u>תרגיל</u>: "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R},\tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

פתרון: $\{[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\delta): a,b\in\mathbb{R}, \varepsilon>0, \delta>0\}$ בסיס למישור סורגנפראי.



מישור סורגנפראי $(\mathbb{R},\tau_s)^2$ כן ספרבילי, $\mathbb{Q}^2$ צפוף בו.

הסיבה היא שכל אלמנט של בסיס פוגש את $\mathbb{Q}^2$

$[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\delta)\cap\mathbb{Q}^2 \supset (a,a+\varepsilon)\times(b,b+\delta)\cap\mathbb{Q}^2 \neq \varnothing$.

נגדיר תת מרחב שלו $X := \{(x,-x) \mid \quad x\in\mathbb{R}\} \subset (\mathbb{R},\tau_s)^2$

אז כל נקודה שלו מבודדת ב X כי

$[x,x+1)\times[-x,-x+1)\cap X = \{(x,-x)\}$

לכן X דיסקרטי. כל תת קבוצה בה היא סגורה. לכן צפופה בו רק X
עצמו. העוצמה היא עוצמת הממשיים. המסקנה $X\notin Sep$.

☺

<u>תרגיל</u>: א. לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי).

ב. לתת תאור גיאומטרי במקרה של $(\mathbb{N},\tau_{discr})$.

פתרון:

א. נניח נתון (X,τ_{discr}) עם X אינסופי. אז

$X^* = X\cup\{p\}$ נגדיר $\tau^* := \tau_{discr}\cup\{X^*\setminus K:\ K \text{ is finite}\}$.

שקול להגדיר כך: $\tau^* := \{O\subseteq X^* \mid \quad p\in O \Rightarrow X^*\setminus O \text{ is finite}\}$.

ב. במקרה של $X=(\mathbb{N},\tau_{discr})$ נקבל X^* הומאומורפי למרחב $Y:=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$.

על מנת להוכיח קודם כל נבחר בפונקציה חח"ע ועל $f:\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\to X$ ואז נגדיר

$$h:Y=\{0\}\cup\{\tfrac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\to X^*=X\cup\{p\}\quad h(0)=p,h(\tfrac{1}{n})=f(\tfrac{1}{n})$$

הפונקציה היא חח"ע על ורציפה. לכן גם הומאומורפיזם כי $Y\in Comp, X^*\in T_2$.

הרציפות: נניח $O\in\tau^*$. יש שני מקרים בלבד:

א. $p\notin O$

ב. $p\in O$

במקרה א נקבל $0\notin h^{-1}(O)$. וברור ש $h^{-1}(O)$ פתוחה ב $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$.

במקרה ב $X^*\setminus O$ סופי ו $0\in h^{-1}(O)$. במקרה זה $h^{-1}(O)$ משלים של תת קבוצה סופית ב $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$. אבל תת קבוצה סופית סגורה בכל מ"מ.

לכן $h^{-1}(O)$ פתוח ב מרחב $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$

☺

תרגיל: מרחב מנה $S\times[0,1]/\sim$ של גליל $S\times[0,1]$ כשמכוצים את כל הנקודות של בסיס $S\times\{0\}$ לנקודה אחת הומיאומורפי לדיסק סגור דו-מימדי .

פתרון: פונקציה $f(x,t)=tx \quad f:S\times[0,1]\to D$ רציפה על סגורה.

☺

תרגיל: הוכיחו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

הגדרה: נניח Y תת מרחב טופולוגי של X. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת "רטרקציה" retraction אם היא רציפה **על** כך ש $f(y)=y \quad \forall y\in Y$

(שקול: f רציפה על ומתקיים $f\circ f=f$)

פתרון: שימוש במשפט הצימצום (שימו לב שפונקצית הצמצום $f_Y:Y\to Y$ היא פונקצית זהות.

לכן מנה. אז גם $f:X\to Y$.

☺

תרגיל: נניח $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \quad x\ge 0 \vee y=0\}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

נגדיר פונקציה $f(x,y)=x$ $f:X\to\mathbb{R}$ (צמצום של הטלה).

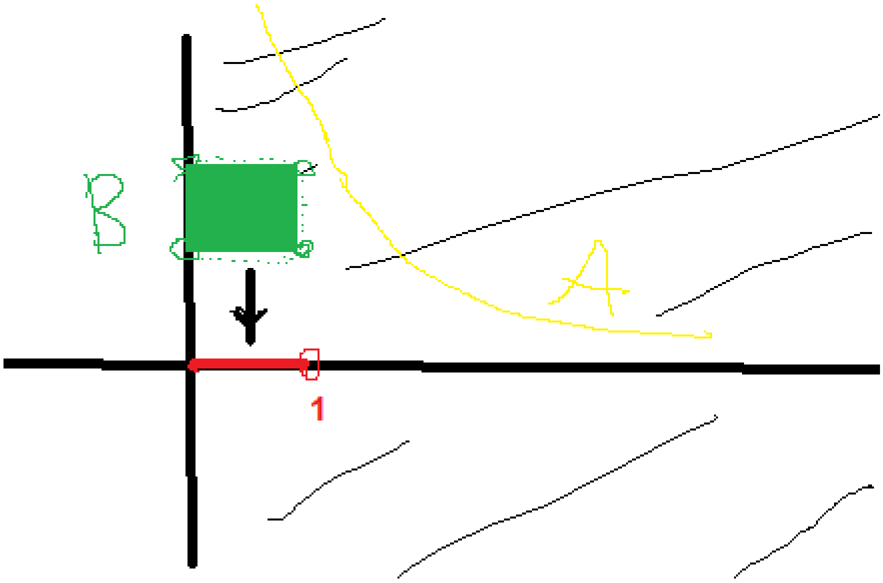
הוכיחו ש f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.

פתרון: צמצום על ציר X מגדיר הומיאומופיזם (בעצם הפונקציה המקורית היא רטרקציה).

לכן $f:X\to\mathbb{R}$ מנה לפי משפט הצמצום.

f לא פתוחה: $\mathrm{B}:=[0,1)\times(2,3)$ פתוחה ב X. אבל $\mathrm{f(B)}=[0,1)$ לא פתוחה ב $\mathbb{R}$.

f לא סגורה: $\mathrm{A}:=\{(x,\tfrac{1}{x}):x>0\}$ סגורה ב X. אבל $\mathrm{f(A)}=(0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.



משפטים למבחן:

עיקרון $Heine$ במ"מ *
קריטריון סגירות במ"מ
שיכון למרחב $Banach$
קריטריון לרציפות *
כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכל כדור פתוח שלו
האלומות – תנאי מספיק לקשירות
$B_2 \subset Sep$.

אם $X \in T_2$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

טופולוגיה חלשה
פתיחות הטלות
נניח $X \in Comp$, $Y \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אז גם $Y \in Comp$.
תמונה רציפה שומרת על $Comp$.
הפרדה של תת רבוצות קומפקטיות

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f פונקציה סגורה.

על השיכון והומיאומורפיזם
כל מרחב מטרי (X, d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

Heine-Borel

קומפקטיות במרחב מטרי *
משפט טיכונוף
קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$
מספר $Lebesgue$
$LComp \cap T_2 \subset T_{3.5}$
$Metriz \subset T_4$.

למה של Urysohn: $T_4 = T_4^{func}$

האוניברסליות של קוביות Tychonoff
מטריזציה *
טופולוגיה חזקה
תנאי מספיק למנה "צמצום"

הערה: בהוכחות ארוכות (למשל שמסונות ב *) יתכן שתקבלו רק שלבים מסוימים.