חזרה

הנחה קבועה: (X,S,μ) ממ"ח. אם $f:X\to\mathbb{R}^*$ פונקציה מדידה אז נגדיר $\begin{array}{c} f^+(x)=\max(f(x),0) \\ f^-(x)=\max(-f(x),0)\end{array}$.
אז $f^+,f^-\geq 0$ ומדידות, ומתקיים

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$$

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$$

אומרים ש$f(x)$ אינטגרבילית $\mathrm{d}\mu$ אם $\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu<\infty$ וגם $\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu<\infty$, ואם f אינטגרבילית נגדיר

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu-\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu$$

משפט 10: תהי $f:X\to\mathbb{R}^*$ מדידה. אזי f אינטגרבילית $\mathrm{d}\mu \iff |f|$ אינטגרבילית $\mathrm{d}\mu$(ז.א. $\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu<\infty$) ואז מתקיים $\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right|\leq\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu$.

אם $E\subset X$ מדידה אפשר להגדיר $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$ ע"י $\int_E f^+\,\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\,\mathrm{d}\mu$, או באופן שקול ע"י $\int_X fI_E\,\mathrm{d}\mu$.

משפט 11

נניח ש$f,g:X\to\mathbb{R}^*$ פונקציות אינטגרביליות ו$c\in\mathbb{R}$ קבוע. אזי:

א. אם $h:X\to\mathbb{R}^*$ מדידה ואם $|h(x)|\leq|f(x)|$ לכל $x\in X$, אז h אינטגרבילית.

ב. f אינטגרבילית על כל תת קבוצה מדידה $E\subset X$, ואם $E=A\uplus B$ (A וB מדידות וזרות) אז $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_A f\,\mathrm{d}\mu+\int_B f\,\mathrm{d}\mu$.

ג. $\mu\{x\in X||f(x)|=\infty\}=0$.

ד. אם E מדידה ואם $\mu(E)=0$ אז $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$.

ה. cf אינטגרבילית ו$\int_X cf\,\mathrm{d}\mu=c\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

ו. $f+g$ אינטגרבילית ומתקיים $\int_X(f+g)\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\,\mathrm{d}\mu+\int_X g\,\mathrm{d}\mu$.

ז. אם $f_1,\dots f_n$ אינטגרביליות ואם $c_1,\dots c_n$ קבועים אז $\sum_{k=1}^n c_kf_k$ אינטגרבילית ומתקיים

$$\int_X\left(\sum_{k=1}^n c_kf_k\right)\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^n c_k\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu$$

ח. אם לכל X $f(x)\leq g(x)$ אז $\int_X f\,\mathrm{d}\mu\leq\int_X g\,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה

א. $|f|$ ו$|h|$ פונקציות לא שליליות, ועבורן ידוע ממשפט 3 כי

$$\int_X |h| \, \mathrm{d}\mu \le \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

כי f אינטגרבילית. לפי משפט 10 h אינטגרבילית.

ב. אם $E \subset X$ מדידה אז מדידה אז לכל $x \in X$ $|f(x) I_E(x)| \le |f(x)|$. לפי סעיף א' fI_E אינטגרבילית. ז.א. f אינטגרבילית על E. יתר על כן, אם $E = A \uplus B$ אז f אינטגרבילית בA ובB כנ"ל, ולפי משפט 3

$$\int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_B f^+ \, \mathrm{d}\mu$$

כמו כן

$$\int_E f^- \, \mathrm{d}\mu = \int_A f^- \, \mathrm{d}\mu + \int_B f^- \, \mathrm{d}\mu$$

כיוון שf אינטגרבילית כל האינטגרלים האלה סופיים, ואפשר להחסיר נוסחאות להסיק

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_A f^+ - \int_A f^- + \int_B f^+ - \int_B f^- = \int_A f + \int_B f$$

ג. כיוון שf אינטגרבילית, בפרט $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty$, נובע ממשפט 8 ש$\mu\{x \in X | f^+(x) = \infty\} = 0$. ז.א. $\mu\{x \in X | f(x) = +\infty\} = 0$. כמו כן $\int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty$ ונובע כנ"ל ש$\mu\{x \in X | f(x) = -\infty\} = 0$. מכל זה נובע $\mu\{x \in X | |f(x)| = \infty\} = 0$.

ד. אם $\mu(E) = 0$ נובע ממשפט 3 ש$\int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu = 0$, לכן $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu = 0$.

ה. cf אינטגרבילית כי היא מדידה, ומתקיים $\overbrace{\int_X |cf| \, \mathrm{d}\mu = |c| \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu}^{\text{positive}} < \infty$, לכן ע"פ סעיף א' cf אינטגרבילית.

כעת, אם $c > 0$, $\begin{matrix} (cf)^+ = cf^+ \\ (cf)^- = cf^- \end{matrix}$. לכן ע"פ משפט 3(לפונקציות $0 \le$)

$$\int_X cf \, \mathrm{d}\mu = \int_X (cf)^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X (cf)^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X cf^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X cf^- \, \mathrm{d}\mu =$$

$$= c\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - c\int_X f^- \, \mathrm{d}\mu = c\left[\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu\right] = c\int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

ואם $c < 0$ הרי $-c > 0$ ומתקיים $\begin{matrix} (cf)^+ = -cf^- \\ (cf)^- = -cf^+ \end{matrix}$, ושוב ע"פ משפט 3.

בדיקה במעבדה: אם $f(x) > 0$ אז $\begin{matrix} f^{+}(x) = f(x) \\ f^{-}(x) = 0 \end{matrix}$. כיוון ש$c < 0$, $cf(x) < 0$, ולכן

$$(cf)^{-}(x) = -cf(x) = -cf^{+}(x) \qquad (cf)^{+}(x) = 0 = -cf^{-}(x)$$

לפי זה,

$$\int cf = \int (cf)^{+} - \int (cf)^{-} = \int -cf^{-} - \int -cf^{+}$$

וכיוון ש$-c > 0$, משפט 3 אומר שזה שווה

$$-c \int f^{-} + cf^{+} = c \left[\int f^{+} - \int f^{-} \right] = c \int f$$

ו. $f+g$ אינטגרבילית כי

$$\int_X |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_X |g| \, \mathrm{d}\mu$$

אמנם $f+g$ לא מוגדרת היטב במצב של $\infty - \infty$ או $-\infty + \infty$, אבל לפי סעיף ג' הנקודות האלה מהוות קבוצה בעלת מידה 0. אז נוכל לכתוב $X = E \uplus E^{\complement}$ כאשר $E^{\complement} = \{x \in X \,|\, |f(x)| + |g(x)| = \infty\}$ ו$\mu\left(E^{\complement}\right) = 0$, ועל E $f(x)$ ו$g(x)$ מקבלות ערכים סופיים. כעת, לכל $x \in E$:

$$(f+g)^{+} - (f+g)^{-} = f + g = \left(f^{+} - f^{-}\right) + \left(g^{+} - g^{-}\right)$$

וכולם מספרים סופיים, ולכן אפשר להעביר אגף לומר

$$(f+g)^{+} + f^{-} + g^{-} = f^{+} + g^{+} + (f+g)^{-}$$

כל הפונקציות הנ"ל לא שליליות, ונובע ממשפט 7 ש

$$\int_E (f+g)^{+} + \int_E f^{-} + \int_E g^{-} = \int_E f^{+} + \int_E g^{+} + \int_E (f+g)^{-}$$

כיוון ש$f, g, f+g$ כולן אינטגרביליות, כל האינטגרלים כאן מספרים סופיים ואפשר להעביר אגף:

$$\int_E (f+g)^{+} - \int_E (f+g)^{-} = \int_E f^{+} - \int_E f^{-} + \int_E g^{+} - \int_E g^{-}$$

ז.א. $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$, וכיוון ש$\mu\left(E^{\complement}\right) = 0$ בעצם הוכחנו $\int_X f + g = \int_X f + \int_X g$.

ז. נובע מה' וו' באינדוקציה.

ח. אם $f \leq g$ הרי $\underbrace{(f-g)}_{\geq 0} + f = g$. לפי סעיף ו' $\int g = \underbrace{\int (g-f)}_{\geq 0} + \int f$, ז.א. $\int g \geq \int f$.

הכללות

1. בסעיף ב' אפשר להכליל בכך: אם $E=\biguplus\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ כאשר כל E_n מדידה, אזי $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f\,\mathrm{d}\mu$ כי לפי משפט 8 $\int_E f^+\,\mathrm{d}\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^+\,\mathrm{d}\mu$ וגם $\int_E f^-=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^-\,\mathrm{d}\mu$. נחסיר נוחסאות לקבל את התוצאה.
2. בכל הסעיפים מספיק שהתנאים יתקיימו כב"מ($\mathrm{d}\mu$) אם ידוע שהפונקציות מדידות.

משפט 12(משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג)

יהיו $f_n:X\to\mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות, ונניח שלכל $x\in X$ קיים גבול $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.
עוד נניח שקיימת פונקציה אינטגרבילית $g:X\to[0,\infty]$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in X$ $|f_n(x)|\le g(x)$. אזי כל f_n וגם f אינטגרבילית, ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

הוכחה

כיוון שלכל n ולכל x $|f_n(x)|\le g(x)$ וg אינטגרבילית, סעיף א' של משפט 11 נותן שכל f_n אינטגרבילית. לכל $x\in X$ $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ ולכן גם מתקיים $|f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|\le g(x)$ ולכן f אינטגרבילית.

הנתון $|f_n(x)|\le g(x)$ אומר שלכל $x\in X$, $-g(x)\le f_n(x)\le g(x)$. מכאן שלכל $x\in X$ $f_n(x)+g(x)\ge 0$ ושואף ל$f(x)+g(x)$. לפי למת פאטו:

$$\int_X(f+g)\,\mathrm{d}\mu\le\underline{\lim}\int_X(f_n+g)\,\mathrm{d}\mu$$

זה שקול ל

$$\int_X f+\int_X g\le\underline{\lim}\int_X f_n+\int_X g$$

וכיוון שg אינטגרבילית $\int_X g<\infty$ ומותר להעביר אגף לומר $\int_X f\le\underline{\lim}\int_X f_n$.

בהמשך ההוכחה נסתמך על העובדה שאם $\{a_n\}$ סדרה ממשית אז $\underline{\lim}(-a_n)=-\overline{\lim}a_n$.

ובכן: לפי הנתון לכל $x\in X$ $f_n(x)\le g(x)$, ולכן $g(x)-f_n(x)\ge 0$ ושואף ל$g(x)-f(x)$. שוב לפי פאטו:

$$\int_X(g-f)\,\mathrm{d}\mu\le\underline{\lim}\int_X(g-f_n)\,\mathrm{d}\mu$$

כיוון שg, וf_n אינטגרביליות, נובע ממשפט 11 סעיף ז':

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu-\int_X f\,\mathrm{d}\mu\le\underline{\lim}\left(\int_X g-\int_X f_n\right)$$

ז.א.

$$\cancel{\int_X g\,\mathrm{d}\mu} - \int_X f\,\mathrm{d}\mu \le \int_X g\,\mathrm{d}\mu + \underline{\lim} - \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \cancel{\int_X g\,\mathrm{d}\mu} - \overline{\lim}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

$$\overline{\lim}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

בסיכום הוכחנו:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu \le \underline{\lim}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \underset{\text{always}}{\le} \overline{\lim}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

הדבר ייתכן רק אם כל אי שוויון בעצם שוויון. לכן $\overline{\lim}\int f_n = \underline{\lim}\int f_n$ וקיים $\lim_{n\to\infty}\int f_n$ והוא שווה $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

■

משפט 13(משפט ההתכנסות החסומה)

נניח ש$E \subset X$ מדידה ו$\mu(E) < \infty$. עוד נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מוגדרת פונקציה מדידה $f_n : E \to \mathbb{R}$ וקיים $M > 0$ כך שלכל n ולכל $x \in E$ $|f_n(x)| \le M$, ולכל $x \in E$ קיים $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. אזי

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה

לכל $x \in E$ נגדיר $g(x) = M$. אז $g(x) \ge 0$ מדידה והיא גם אינטגרבילית כי $\int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_E M\,\mathrm{d}\mu = M\mu(E) < \infty$. כיוון שלכל x ולכל n $|f_n(x)| \le M = g(x)$, יש כאן כל התנאים של משפט 12 ונוכל להסיק ש$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu$.

■

שיפור למשפטים 12 ו13

מספיק להניח שכל התנאים מתקיימים כב"מ אם ידוע שהפונקציות כולן מדידות.

הכללות לבג לתורת רימן

הנחה קבועה: m = מידת לבג על $\mathscr{L}(\mathbb{R})$. הרבה פעמים נכתוב $\int_a^b f\,\mathrm{d}m$ במקום $\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}m$.

המשפט הראשון בפרק הוא משפט הגזירה של לבג, האומר בין היתר שאם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי $f'(x)$ קיימת כב"מ($\mathrm{d}m$)

אחד המכשירים להוכחת משפט זה הוא "למת ויטלי", שהיא למה קומבינטורית.

כמוטיבציה ללמה נביא תרגיל:

תרגיל

נניח ש$E\subset\mathbb{R}$ מקיימת $m^*(E)=S<\infty$ ו$\varepsilon>0$ נתון. אזי קיימים קטעים פתוחים זרים בזוגות $I_1,\dots I_n$ כך שאם $S=\bigcup\limits_{m=1}^{n}I_m$ אז $m(S)<s+\varepsilon$ ו$m^*(E-S)<\varepsilon$(ז.א. $S=\bigcup\limits_{m=1}^{n}I_m$ כמעט מכסה את E!).

הוכחה

לפי הגדרת m^* יש קבוצה פתוחה $E\supset O$ כך ש$m(O)<s+\varepsilon$. נוכל לכתוב $O=\biguplus\limits_{m=1}^{\infty}I_m$ כאשר הI_m קטעים זרים בזוגות. נבחר n טבעי כך ש$s<\sum\limits_{m=1}^{n}|I_m|$ וממילא $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}|I_m|<\varepsilon$, ונגדיר $S=\biguplus\limits_{m=1}^{n}I_m$. כעת $E\subset O=S\cup\bigcup\limits_{m=n+1}^{\infty}I_m$. לכן $E-S\subset\bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty}I_m$. נובע ש

$$m^*(E-S)\le m^*\left[\bigcup_{n=m+1}^{\infty}I_m\right]<\varepsilon$$

כעת

$$E=(E-S)\cup(E\cap S)$$

הגדרה

תהי $E\subset\mathbb{R}$ קבוצה כלשהי, ותהי F משפחה של קטעים. נאמר שF מכסה את E במובן של ויטלי אם לכל $x\in E$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים קטע $I\in F$ כך ש$x\in I$ ו$|I|<\varepsilon$.

במילים: F מכילה קטעים קטנים כרצוננו סביב כל נקודה.

למת ויטלי

נניח ש$E\subset\mathbb{R}$ קבוצה המקיימת $m^*(E)<\infty$, ונניח שF משפחה של קטעים שמכסה את E במובן של ויטלי. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר סופי של קטעים זרים בזוגות מF $I_1,I_2,\dots I_n$ כך ש$m^*\left(E-\biguplus\limits_{k=1}^{n}I_k\right)<\varepsilon$.

ז.א., E "כמעט" שווה לאיחוד זר של קטעים מF.

הדרך להוכיח את משפט הגזירה של לבג היא להראות שלכמעט כל x

$$\underline{\lim}_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\overline{\lim}_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

תזכורת: אם $g\left(x\right)$ פונקציה מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 אז מגדירים:

- $\underline{\lim}_{x\to x_0} g\left(x\right)=\sup_{\delta>0}\inf_{0<|x-x_0|<\delta} g\left(x\right)$ =המינימום של גבולות $\lim_{n\to\infty} g\left(x_n\right)$ עבוד סדרות $x_0 \leftarrow x_n \neq x_0$.
- $\overline{\lim}_{x\to x_0} g\left(x\right)=\inf_{\delta>0}\sup_{0<|x-x_0|} g\left(x\right)$ =המקסימום של גבולות $\lim_{n\to\infty} g\left(x_n\right)$ כאשר $x_0 \neq x_n \to x_0$.

$\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)$ קיים $\iff$ $\overline{\lim}_{x\to x_0}\ \underline{\lim}_{x\to x_0} g\left(x\right)$.

דוגמה: $g\left(x\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. $\lim_{x\to 0} g\left(x\right)$ אינו קיים, אבל $\overline{\lim}_{x\to 0} g\left(x\right)=1$, $\underline{\lim}_{x\to 0} g\left(x\right)=-1$.