

תרגיל בית 11 בתורת החבורות

88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). מצאו את הסדרים של כל תת-חבורות סילו של S_5 . מי מהן אבליות?

שאלה 2 (חזרה). תהי $H \leq \mathbb{Q}$ תת-חבורה מאינדקס סופי. הוכיחו כי $H = \mathbb{Q}$. הסיקו כי גם ל- \mathbb{Q}/\mathbb{Z} אין תת-חבורות נאותות מאינדקס סופי.

שאלה 3. יהי p ראשוני.

א. (חימום) תהי $P \leq S_p$ תת-חבורת p -סילו. הוכיחו כי P אבלית.

ב. תהי $P \leq S_{p^2}$ תת-חבורת p -סילו. הוכיחו שיש לה תת-חבורה אבלית $H \leq P$ שהיא מסדר p^2 .

ג. (קשה) עבור תת-החבורה H מהסעיף הקודם, הוכיחו שכל תמורה $\sigma \in S_{p^2}$ שאינה שייכת ל- H לא מתחלפת עם כל איברי H . בפרט, תת-החבורה $P \leq S_{p^2}$ לא אבלית.

שאלה 4. יהיו $p \leq q$ ראשוניים (לאו דווקא שונים).

א. הוכיחו שכל חבורה מסדר pq^n עבור $n \in \mathbb{N}$ אינה פשוטה.

ב. הוכיחו שגם חבורות מסדר 56 או 63 הן לא פשוטות. זה שונה מהסעיף הקודם.

ג. (רשות מאוד קשה!) תהי חבורה G מסדר $p^a q^b$ עבור $a, b \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי G אינה פשוטה לכמה שיותר זוגות אפשריים (a, b) שאתם מצליחים, שלא טיפלנו בהם עד כה בכיתה או בתרגיל.

רמז: התשובה היא לכל a, b . הוכחה לכך דורשת בדרך כלל כמה קורסים.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית, ונניח כי מספר ראשוני p מחלק את $|G|$. הוכיחו שקיים $z \in G$ מסדר p כך ש- $C_G(z)$ מכיל תת-חבורת p -סילו של G . רמז: לתת-חבורת p -סילו יש מרכז.

שאלה 6. תהי חבורה G מסדר $p^t m$, כאשר p ראשוני, $m > 1$ טבעי שזר ל- p ו- $t \in \mathbb{N}$.

א. נניח ש- $|G|$ לא מחלק את $m!$ (ניתן להסתפק בכך ש- $|G|$ לא מחלק את $n_p!$). הוכיחו כי G לא פשוטה. רמז: העידון של משפט קיילי.

ב. הוכיחו שחבורות מסדרים 36, 150 או 160 אינן פשוטות.

שאלה 7. תהינה G, H חבורות.

א. הוכיחו כי $\text{Inn}(G) \times \text{Inn}(H) \cong \text{Inn}(G \times H)$

ב. הוכיחו כי $\text{Inn}(S_3) \cong S_3$ ומצאו אוטומורפיזם שאינו פנימי של החבורה $S_3 \times S_3$. רמז: נוח לחשוב על $S_3 \times S_3$ כתת-חבורה של S_6 ושם לחפש אוטומורפיזם.

שאלה 8. תהי G חבורה.

א. הוכיחו כי $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$. רמז: בדקו מי הוא $\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1}$ בכל בחירה.

ב. הוכיחו שאם $Z(G) = \{e\}$, אז $C_{\text{Aut}(G)}(\text{Inn}(G)) = \{\text{id}\}$ ובפרט מתקיים $Z(\text{Aut}(G)) = \{\text{id}\}$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי G חבורה מסדר n . הוכיחו כי השיכון $G \rightarrow S_n$ ממשפט קיילי אינו שיכון לתוך A_n אם ורק אם תת-חבורה 2-סילו של G היא ציקלית לא טריוויאלית. רמז: העזרו בשאלה מתרגיל בית קודם.

בהצלחה!