ההיררכיה הפולינומית

$L\in NP$ אם קיים אלגוריתם פולינומי V ופולינום $P\left(\cdot\right)$ כך ש:

$$x\in L\iff\exists_{y\in\{0,1\}^{P(|x|)}}V\left(x,y\right)=1$$

מגדירים $CONP=\left\{ L\middle|\overline{L}\in NP\right\}$. כלומר $L\in NP$ אם קיים אלגוריתם פולינומי V ופולינום $P\left(\cdot\right)$ כך ש:

$$x\in L\iff\forall_{y\in\{0,1\}^{P(|x|)}}V\left(x,y\right)=1$$

נשים לב ששפות NP אפשר להגדיר עם הכמת קיים, ושפות $CONP$ אפשר להגדיר עם הכמת לכל. למשל:

- SAT - כל הביטויים הבוליאנים עבורם **קיימת** הצבה מספקת.
- $CO-SAT$ - כל הביטויים הבוליאנים עבורם **כל** הצבה אינה מספקת.

לכאורה נראה שכיסינו את כל המחלקות(כי יש לנו רק שני כמתים), אבל מה עם למשל שפת כל הביטויים הבוליאנים עבורם **קיימת** הצבה מספקת **יחידה**? בשביל זה צריך לשלב את שני הכמתים: כל הביטויים הבוליאנים עבורם **קיימת** הצבה מספקת **וכל** הצבה מספקת אחרת אינה מספקת.

הגדרה - Σ_k וΠ_k

- $L\in\Sigma_k$ אם קיים אלגוריתם פולינומי V ופולינום $P\left(\cdot\right)$ כך ש:

$$x\in L\iff\exists_{y_1\in\{0,1\}^{P(|x|)}}\forall_{y_2\in\{0,1\}^{P(|x|)}}\ldots Q_{y_k\in\{0,1\}^{P(|x|)}}$$

$$\{\exists,\forall\}\ni Q\qquad y_i\in\{0,1\}^{P(|x|)}\qquad V\left(x,y_1,y_2,\ldots y_k\right)=1$$

- $L\in\Pi_k$ אם קיים אלגוריתם פולינומי V ופולינום $P\left(\cdot\right)$ כך ש:

$$x\in L\iff\forall_{y_1\in\{0,1\}^{P(|x|)}}\exists_{y_2\in\{0,1\}^{P(|x|)}}\forall_{y_3\in\{0,1\}^{P(|x|)}}\ldots Q_{y_k\in\{0,1\}^{P(|x|)}}$$

$$\{\exists,\forall\}\ni Q\qquad y_i\in\{0,1\}^{P(|x|)}\qquad V\left(x,y_1,y_2,\ldots y_k\right)=1$$

- ההיררכיה הפולונומית מוגדרת:

$$PG:=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Sigma_i$$

תכונות

1.

$$\Pi_k = CO - \Sigma_k = \left\{ L \middle| \overline{L} \in \Sigma_k \right\}$$

$$L \in \Pi_k \iff \overline{L} \in \Sigma_k$$

2.

$$\Sigma_k \subseteq \Pi_{k+1} \qquad \Pi_k \subseteq \Sigma_{k+1}$$

3. אם עבור k כלשהו $\Sigma_k = \Pi_k$, אזי $PH = \Sigma_k$.

משמעות

בכל שלב מוסיפים עוד כמתים שנותנים עוד כוח, כאשר Σ_k ו-Π_k נפגשות אבל לא מתלכדות. ההשערה אומרת שההיררכיה היא אינסופית. תכונה 3 אומרת שאם ברמה מסויימת Σ ו-Π מתלכדות, אז ההיררכיה נעצרת - כי עוד כמתים לא יוסיפו עוד כוח.

דוגמאות

1.

$$MAX{-}Clique = \{(G,k)|\text{The maximal Clique in } G \text{ contains exactly k nodes}\}$$

הראו: $MAX - Clique \in \Sigma_2$

$$(G,k) \in MAX - Clique \iff \exists_{S\subseteq V(G)} \forall_{S'\subseteq V(G)} V\left(\left(G,k\right),S,S'\right) = 1$$

כאשר $V\left(\left(G,k\right),S,S'\right) = 1$ אם"ם:

() $|S| = k$

() S מהווה קליק: לכל $u,v \in S$ יש קשת בין u לט v ב-G.

() אם $|S'| > k$ אזי S' לא מהווה קליק: קיימים זוג קודקודים $u,v \in S'$ כך שאין ביניהם קשת.

2. $MIN{-}CNF = \{\varphi|\varphi \text{ is CNF and there is no shorter form equivalent to } \varphi\}$

הראו: $MIN - CNF \in \Pi_2$

$$\varphi \in MIN-CNF \iff \forall_{\varphi'}\exists_v V\left(\varphi,\varphi',v\right)=1$$

כאשר $V\left(\varphi,\varphi',v\right)=1$ אם"ם:

() φ בצורת CNF

() אם $|\varphi|<|\varphi'|$ אז $\varphi\left(v\right)\neq\varphi'\left(v\right)$