

## תרגיל 8- אינפי 2

### שאלה 1

עבור סדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקציית הגבול (אם היא קיימת), וקבעו אם ההתכנסות היא נקודתית או במידה שווה.

א.  $f_n(x) = \cos^{2n}(x)$  בקטע  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

ב.  $f_n(x) = \frac{\arctan x}{n}$  ב  $R$ .

ג.  $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$  בקטע  $(0, \infty)$ .

ד.  $f_n(x) = x^n(1-x^n)$  בקטע  $[0,1]$ .

### שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם  $f_n(x)$  מתכנס במידה שווה ל  $f(x)$  בקטע  $I$  אזי  $g(x)f_n(x)$  מתכנס במידה שווה ל  $g(x)f(x)$ .

### שאלה 3

החליטו אם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים נקודתית, במ"ש או מתבדרים בתחומים הנתונים:

א.  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$  בתחום  $(-a, a)$ .

ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$  בתחום  $[0, \infty)$ .

ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$  בתחום  $[0, \infty)$ .

### שאלה 4

א. חשב וציין את תחום ההתכנסות  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}$ .

ב. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$ .

### שאלה 5

עבור הטורים הבאים קבע לאילו ערכי  $x$  הטור מתכנס בתנאי/בהחלט

א.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2n-1(1+x)}$ .

ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}$ .

## שאלה 6:

תהי  $f_n(x)$  סדרת פונקציות המתכנסת נקודתית ל  $f(x)$  בקטע  $[a, b]$  אך אינה מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע זה.  
הוכיחו כי היא לא מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע  $(a, b)$ .  
רמז: השתמשו במבחן ה  $\lim\text{-sup}$ .

## שאלה 7: (לא לגשה... קצת תרגול של אפסילון... נעלה לכך פתרונות)

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

1. אם  $f_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע  $I$  ו  $g_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $g(x)$  בקטע  $I$  אז  $f_n(x) + g_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $f(x) + g(x)$  בקטע  $I$
2. אם  $f_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע  $I$  אז  $g(x)f_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $g(x)f(x)$  בקטע  $I$
3. אם הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  מתכנס במידה שווה ל  $S(x)$  בקטע  $I$  אז הסדרה  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ל  $0$  בקטע  $I$ .
4. אם  $f_n(x)$  מתכנסת במ"ש ל  $f(x)$  בקטע  $I$  וכל אחת מהפונקציות  $f_n(x)$  היא רציפה במ"ש ב  $I$  אז גם  $f(x)$  רציפה במ"ש ב  $I$ .