83-118 מתמטיקה בדידה 2
פתרון מבחן לדוגמא

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מתוך 5.
יש לנמק את התשובות.
משך המבחן: שעתיים וחצי.
חומר עזר: מחשבון בלבד.

1. בכמה אופנים ניתן לחלק 3 פרסים **שונים** בין n תלמידים אם:

(א) אף תלמיד אינו יכול לקבל יותר מפרס אחד.
$n(n-1)(n-2)$

(ב) ניתן לקבל יותר מפרס אחד.
n^3

(ג) כל פרס ניתן ל2 תלמידים (שונים), ואף תלמיד לא מקבל יותר מפרס אחד.
$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}$$

(ד) כל פרס ניתן ל2 תלמידים (שונים), וניתן לקבל יותר מפרס אחד.
$$\binom{n}{2}^3$$

2. במכונה מסוימת ניתן להדפיס מילים ע"י שימוש ברצפים: "אב", "גד", "ה", "ו" בלבד.
אורך מילה מוגדר להיות מספר האותיות המעורבות בה.
למשל: המילה "אבאבה" היא מאורך 5. את המילה "אג" אי אפשר ליצור במכונה.

(א) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר המילים מאורך n שניתן להדפיס במכונה.
פתרון:
נסמן את מספר המילים שניתן לייצר מאורך n ב $f(n)$.
את המילים מאורך n ניתן לחלק לאלו שנגמרות ב"אב", אלו שנגמרות ב"גד", אלו שנגמרות ב"ה" ואלו שנגמרות ב"ו" (וו חלוקה ל4 קבוצות זרות).
המילים שנגמרות ב"אב" מתאימות באופן $1:1$ למילים מאורך $n-2$ שנוצרות כאשר מוחקים את הסיומת "אב"- ולכן יש $f(n-2)$ כאלה.
באופן דומה יש $f(n-2)$ מילים שנגמרות ב"גד", $f(n-1)$ מילים שנגמרות

ב"ה" ו$f(n-1)$ שנגמרות ב"ו".

סך הכל נקבל $f(n) = 2f(n-1) + 2f(n-2)$.

צריך 2 תנאי התחלה, וקל לראות ש $f(1) = 2$ ("ה" ו- "ו"). וש $f(2) = 6$ (אב,גד,הה,וו,הו,וה).

(ב) פתרו את נוסחת הנסיגה (כלומר מצאו נוסחה סגורה).

המשוואה האופיינית היא $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$ והשורשים הם $1 \pm \sqrt{3}$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\alpha_1 \left(1+\sqrt{3}\right)^n + \alpha_2 \left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} \alpha_1(1+\sqrt{3}) + \alpha_2(1-\sqrt{3}) = 2 \\ \alpha_1(1+\sqrt{3})^2 + \alpha_2(1-\sqrt{3})^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 2 \\ 4+2\sqrt{3} & 4-2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הוא $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \left(1+\sqrt{3}\right)^n + \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \left(1-\sqrt{3}\right)^n$.

3. הוכיחו בעזרת נימוק קומבינטורי כי

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

(נימוק אלגברי יזכה רק ב6 נקודות).

פתרון:

מספר הדרכים לבחור ועד בגודל k וראש ועד מתוך קבוצה בת n אנשים.

מצד אחד אפשר לבחור k אנשים ומתוכם לבחור ראש, לזה יש $k \binom{n}{k}$ אפשרויות.

מצד שני אפשר לבחור ראש ועד מתוך הn אנשים, ואז לבחור עוד $k-1$ אנשים לשאר הועד מתוך שאר האנשים. לזה יש $n \binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות. ולכן יש שיוויון.

4. כמה מהשלמים $1, 2, 3, \ldots, 6000$ ניתנים לחלוקה (ללא שארית) על ידי לפחות אחד מהמספרים $2, 5, 7$?

5. יהי $G = (V, E)$ גרף סופי 3-רגולרי.

(א) הוכיחו כי $|V|$ הוא מספר זוגי.

פתרון:

לפי למת לחיצת הידיים

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$$

מכיוון שהגרף הוא 3־רגולרי $\sum 3 = 2|E| \Leftarrow 3|V| = 2|E| \Leftarrow |V|$ זוגי.

(ב) כמה צלעות יש ל־G אם $|V| = n$?

פתרון:

נציב במה שקיבלנו לעיל: $3n = 2|E| \Leftarrow |E| = \frac{3n}{2}$.

(ג) האם הגרף בהכרח קשיר? (הוכיחו או ציירו דוגמא נגדית).

פתרון:

לא בהכרח. למשל $K_4 \sqcup K_4$ (גרף שהוא פעמיים הרגף המלא).

(ד) האם יתכן ש־G הוא עץ? (ציירו דוגמא או נמקו למה לא יתכן).

פתרון:

לא ייתכן. אם G עץ אז היו לו $n-1$ צלעות, אבל לאור סעיף ב' צריך להתקיים

$$\begin{aligned} n-1 &= \frac{3n}{2} \\ 2(n-1) &= 3n \\ -2 &= n \end{aligned}$$

מה שלא אפשרי.

בהצלחה!