תרגול 14 – אינפי 1

הגדרה

פונקציה ממשית $\alpha(x)$ היא $o(x^n)$ [במילים: "או קטן של x^n"] אם α רציפה

באפסו ומקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^n}=0$.

משפט (פיתוח טיילור עם שארית Peano)

נניח $f\in D^n(a,b)$ ויהי $x_0\in(a,b)$. אזי $x\to x_0$, $f(x)=P_n(x,x_0)+o\left((x-x_0)^n\right)$,

כאשר $P_n(x,x_0)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ הוא פולינום טיילור בנקודה x_0 מסדר n.

הערה: שימו לב שבפולינום טיילור מסדר n המקדם של $(x-x_0)^n$ יכול

להתאפס, ועם זאת עדיין נאמר שהוא פולינום טיילור מסדר n.

תרגיל

פתחו את הפונקציה $f(x)=x+\sin x$ לפולינום טיילור מסדר 2 סביב π (עם

שארית Peano).

פתרון

נגזור: $f(x)=x+\sin x,\ \ f'(x)=1+\cos x,\ \ f''(x)=-\sin x$; נציב את π:

$f(\pi)=\pi,\ \ f'(\pi)=1+(-1)=0,\ \ f''(\pi)=0$. לכן הפיתוח הוא:

$f(x)=\pi+\frac{0}{1!}(x-\pi)^1+\frac{0}{2!}(x-\pi)^2+o\left((x-\pi)^2\right)$ ומכאן $f(x)=\pi+o\left((x-\pi)^2\right)$.

מש"ל

תרגיל

מצאו פולינום טיילור מסדר 2 סביב $x_0=2$ של הפונקציה $f(x)=x^3-4x^2+2x$.

היעזרו בפולינום שמצאתם על מנת לחשב את $f''(2)$.

פתרון

נעשה מעין "טריק" ונציב במקום x את $(x-2)+2$ ונפתח את הפונקציה

במונחים של $(x-2)$.

$$f(x)=((x-2)+2)^3-4((x-2)+2)^2+2((x-2)+2)=(x-2)^3+3\cdot(x-2)^2\cdot 2+$$
$$+3(x-2)\cdot 2^2+8-4\left((x-2)^2+2\cdot 2(x-2)+4\right)+2(x-2)+4=$$
$$=-4-2(x-2)+2(x-2)^2+(x-2)^3$$

מתקיים $(x-2)^3=o\left((x-2)^2\right)$ שכן $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{(x-2)^2}=0$. לכן

$f(x)=-4-2(x-2)+2(x-2)^2+o\left((x-2)^2\right)$. מכיוון ש- $-4-2(x-2)+2(x-2)^2$

הוא פולינום מסדר 2, לפי מה שהוכחתם בכיתה (יחידות הפיתוח) זהו פולינום טיילור מסדר 2 סביב 2 של הפונקציה שלנו.

כעת, נעבור למציאת הנגזרת. ראיתם בהרצאה את הטענה הבאה:

אם $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$ אזי

$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

אצלנו $a_2=2$ ולכן $\frac{f''(2)}{2!}=2$ ולכן $f''(2)=4$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

מצאו $\left(e^{x^2}\right)^{(m)}(0)$.

<u>פתרון</u>

לכל $t\in\mathbb{R}$: $e^t=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}+o(t^n),\quad t\to 0$ $(*)$. אזי $e^{x^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}+o(x^{2n}),\quad x\to 0$. איך

קיבלנו באגף ימין את המחובר $o(x^{2n}),\quad x\to 0$?

מ (*) נובע ש $e^t=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}+f(t)$ כאשר f רציפה באפס ו-

$f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^n}=0$. נשים לב שאם $t=x^2$ אז $x\to 0\Leftrightarrow t\to 0$. כמו כן

נקבל $\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^{2n}}=0$. ברור ש $g(x)=f(x^2)$ פונקציה של איקס. מתקיים לפי כלל

הרכבה שהפונקציה $g(x)$ רציפה באפס (הרכבת רציפות) וכן

$g(0)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)=0$ ו- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^{2n}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^{2n}}=0=g(0)$.

כעת עפ"י יחידות פולינום טיילור נקבל ש $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}$ הוא פולינום טיילור מסדר $2n$

של e^{x^2} (בפיתוח מסביב לאפס). נקבל מיידית שעבור $m=2k-1$, כלומר ערך

אי זוגי, מתקיים $\left(e^{x^2}\right)^{(m)}(0)=0$.

עבור $m=2k$ מתקיים: $\frac{1}{k!}=\frac{\left(e^{x^2}\right)^{(2k)}(0)}{(2k)!}$ (מהשוואת המקדמים של x^{2k}) לכן

$\left(e^{x^2}\right)^{(2k)}(0)=\frac{(2k)!}{k!}$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

חשבו $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{(\sin x)^3}$.

<u>פתרון</u>

ניעזר בכך ש $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)$ ו $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{(\sin x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x}{(\sin x)^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-\frac{1}{2!}x^3+\frac{x^5}{2!\cdot 3!}+o(x^3)\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right)+o(x^3)\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-x}{(\sin x)^3}$$

לפני שנמשיך בפישוט נראה ש $o(x^3)\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right)+o(x^3)\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)=o(x^3)$

מתקיים $\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right)+o(x^3)\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)}{x^3}=$ ומכאן אכן

$$\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}\lim_{x\to0}\left(\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right)+\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)\right)=0\cdot1=0$$

$$o(x^3)\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right)+o(x^3)\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)=o(x^3).$$

בחזרה לפישוט הגבול המקורי-

נקבל

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-\frac{1}{2!}x^3+o(x^3)-x}{(\sin x)^3}=\lim_{x\to0}\frac{-x^3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)}{(\sin x)^3}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{(\sin x)^3}=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\lim_{x\to0}\frac{x^3}{(\sin x)^3}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^3}{(\sin x)^3}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot1+0\cdot1=-\frac{2}{3}$$

מש"ל

<u>משפט</u> (שארית לגרנג')

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים סביב הנקודה $x=a$. תהי x נקודה כלשהי בסביבה זו. אזי קיימת נקודה c בין a ל-x כך ש:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r_n(x)$$ כאשר

$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ נקראית שארית לגרנג'.

<u>תרגיל</u> (ממבחן)

השתמשו בקירוב לינארי על מנת לחשב את $\sqrt[3]{1006}$.

<u>פתרון</u>

נפתח את $f(x)=\sqrt[3]{x}$ סביב 1000 לפולינום מסדר 1 (קירוב לינארי הוא למעשה הפיתוח לפולינום טיילור מסדר 1). מתקיים $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f'(1000)=\frac{1}{300}$, $f(1000)=10$. לכן $f(x)=f(1000)+\frac{f'(1000)}{1!}(x-1000)$ ומכאן

$f(x)=10+\frac{(x-1000)}{300}$. נציב את הערך הדרוש: $f(1006)=1000+\frac{6}{300}=10.02$.

כעת, לשם התרגול, ננסה להעריך את השגיאה.

מתקיים $r_1(1006)=\frac{f''(c)}{2!}(1006-1000)^2$ ולכן $|r_1(1006)|=\left|\frac{4}{\sqrt[3]{c}^5}\right|<\frac{4}{10^5}$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

חשבו את $\ln(1.03)$ באמצעות פיתוח טיילור של הפונקציה $f(x)=\ln(x+1)$, בדיוק של 0.01 .

<u>פתרון</u>

נפתח תחילה את $\ln(1+x)$ סביב אפס.

$$\ln(1+x)'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1} \qquad \ln(1+0)'=1$$

$$\ln(1+x)''=-1(1+x)^{-2} \qquad \ln(1+0)''=-1$$

$$\ln(1+x)^{(3)}=2\cdot1\cdot(1+x)^{-3} \qquad \ln(1+0)^{(3)}=2!$$

$$\ln(1+x)^{(4)}=-3\cdot2\cdot1\cdot(1+x)^{-4} \qquad \ln(1+0)^{(4)}=-3!$$

$$\vdots$$

$$\ln(1+x)^{(n)}=(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} \qquad \ln(1+0)^{(n)}=(-1)^{n+1}(n-1)!$$

מתקיים: $r_n(x)=\frac{(-1)^{n+2}n!(1+c)^{-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(n+1)!(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$ ולכן

$r_n(x)=\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$. כלומר,

$$f(x)=\ln(1+x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{2!}{3!}x^3+\frac{-3!}{4!}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^n+r_n(x)=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+r_n(x)$$

כעת אנו מעוניינים לחשב את $f(0.03)$. ננסה לחסום את השארית כאשר $c\in(0,0.03)$: $r_n(0.03)=\frac{(-1)^{n+2}0.03^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$. נרצה שיתקיים $|r_n(0.03)|<0.01$. כלומר

$0.01 > \frac{0.03^{n+1}}{(n+1)} > \frac{0.03^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$. נשים לב שזה מתקיים כבר עבור $n=1$, שכן:

$0.01 > \frac{0.0009}{2} = \frac{0.03^2}{2}$.

לכן פולינום טיילור מסדר 1 יעשה את העבודה. לסיום:

$0.03 \approx \ln(1.03) = f(0.03)$.

מש"ל