הרצאה XVI- אינפי 1

ממשיכים עם פונקציות אלמנטריות: הוכחנו בהרצאה הקודמת כי מתקיים $e^x = 1 + x + o(x), x \to 0$. הוכחנו תנאים לגביו e^x וגם לגבי $\ln t$.

דוגמא: $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \{x - a = t\} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{a+t} - e^a}{t} = e^a \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^a$.

דוגמא: $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \{x - a = t\} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(a+t) - \ln a}{t} = \frac{1}{a}$

<u>פונקציה חזקית ומעריכית</u>: חזקית$(x > 0)$ x^α, מעריכית$(a > 0)$ a^x.

הגדרה: $(a > 0)$ $x \to a^x := e^{x\ln a}$, $(x > 0)$ $x \to x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$, $a^b := e^{\ln b}$ $(a > 0)$. כמו כן מתקיים $a^n := e^{n\ln a}$.

גבולות מפורסמים:

1. $\frac{e^y - 1}{y} \to_{y\to 0} 1 \overset{\alpha\ln(1+t) := y \to 0}{\Longrightarrow} \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+t)} - 1}{t} \frac{\alpha \ln(1+t)}{\alpha \ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}$ ולכן $\lim\limits_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$ וגם אפשר להגיד שמתקיים עבור x משתנה ש $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \alpha$.
2. $\ln a = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x\ln a} \ln a = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$. וכאן שמתקיים $a^x = 1 + x + \ln a + o(x), x \to 0$.

לסיכום:

○ $e^x = 1 + x + o(x), x \to 0$	○ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
○ $a^x = 1 + x\ln a + o(x), x \to 0$	○ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
○ $x^\alpha = 1 + (x-1) + o(x-1), x \to 0$	○ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \alpha$
○ $\sin x = x + o(x), x \to 0$	○ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
○ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \to 0$	○ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

חשוב לדעת: $f(x)^{g(x)} := e^{g(x)\ln f(x)}$. צריך לחשב גבול רק לפונקציה מימין.

תרגילים: 1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x - a^x}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{e^{x\ln x} - e^{x\ln a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{e^{x\ln a}(e^\wedge}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{e^{x\ln x}(e^{x(\ln x - \ln a)} - 1)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} e^{x\ln x} \frac{(e^{x(\ln x - \ln a)} - 1)x(\ln x - \ln a)}{(x-a)x(\ln x - \ln a)} =$ $\boxed{a^a} = e^{a\ln a} = \frac{1}{a} a e^{a\ln a} = e^{a\ln a} a \lim\limits_{x\to a} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{a}\right)}{\frac{t}{a} a} = e^{a\ln a} a \lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(t+a) - \ln a}{t} = \{x - a = t\} = e^{a\ln a} a \lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$.

2. $\cos a = \lim\limits_{x\to a} \frac{\left(2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$.

<u>רציפות של sin x, cos x</u>:

הוכחה: $\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}$. $And\ then$ $|\sin x - \sin x_0| \le 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le \frac{2|x - x_0|}{2} \le |x - x_0| \to 0$ ומכאן שמתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. ההוכחה עבור cos זהה.

דוגמא :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2\right)}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}2\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}x-\frac{x^2}{8}}-1\right)}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}2\frac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{8}-\frac{x^2}{8}\right)+o\left(\frac{3x}{8}-\frac{x^2}{8}\right)-1}{x+x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{24}x^2+o(x)\right)}{x(1+x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}x+\frac{o(x)}{x}\right)}{(1+x)}=\frac{1}{4}.$$

תזכורת להגדרה : $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff f(x)=o\big(g(x)\big), x\to p$. לדוגמא $x^3=o(x^2), x\to 0 \ and \ x^2=o(x^3), x\to\infty$.

דוגמא : $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{m}x+\frac{\beta}{n}x+o(x)-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{m}x+o(x)\right)\left(1+\frac{\beta}{n}x+o(x)\right)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}\right)-1}{x}$. תם ונשלם הפרק על הפונקציות הרציפות.

<u>פרק שישי: חשבון דיפרנציאלי של פונקציות של משתנה אחד</u>

<u>גזירות , נגזרת, ודיפרנציאל</u>:

הגדרה : $f:(a,b)\to R$. נתונה נקודה $x_0\in(a,b)$. אומרים שf דיפרנציאבילית או גזירה או קיים גבול סופי $\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=K$. נגיד שK הנגזרת של f בx_0. סימון : $K=f'(x_0)=\frac{dt}{dt}f(x_0)$.

דוגמא 1 : $s(t)$ מהווה מסלול כלשהו. אם נרצה למצוא את המהירות ברגע מסויים, נבצע $\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=v(t_0)$. נקבל את המהירות ברגע מסויים.

דוגמא 2 : $f(x)=x^2$. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=2x_0$.

דוגמא 3 : $f(x)=\sin x$. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\cos x_0$.

<u>דיפרנציאל</u> : $\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=K$ ולכן $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)}{x-x_0}=0$ ומכאן $f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)=o(x-x_0), x\to x_0$. נעביר אגפים ונקבל $f(x)=f(x_0)+k(x-x_0)+o(x-x_0), x\to x_0$. נגדיר $x-x_0=t$. נקבל משוואה חדשה שתראה כמו המשווה הבאה $f(x_0+t)=f(x_0)+k(t)+o(t), t\to 0$. היא תקרא כמעט ליניארית.

הגדרה : הפונקציה הליניארית $k=f'(x_0)$, $t\to kt$. דיפרנציאל של f בנקודה x_0. $df_{x_0}:t\to f'(x_0)t$ ז"א $df_{x_0}(t)=f'(x_0)t$. באופן כללי ניתן לרשום $t\to 0$, $\underbrace{f(x_0+t)-f(x_0)}_{\text{שינוי של } f}=\overbrace{k}^{\text{שינוי של משתנה}}t+\underbrace{o(t)}_{\text{לינארי לגבי } t}$.

<u>הגדרה ומשפט</u> : $f:(a,b)\to R$. נתונה נקודה $x_0\in(a,b)$. f דיפרנציאבילית בx_0 אמ"מ קיים k ממשי כך שמתקיימת ההגדרה השניה שפיתחנו $f(x_0+t)=f(x_0)+k(t)+o(t), t\to 0$, וגם $k=f'(x_0)$.

הוכחה : $\Longrightarrow$: $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=k+\frac{o(t)}{t}\to k=f'(x_0)$. את הכיוון השני הראנו כבר.

גרף של פונקציה *y=f(x)* זה קו ישר משיק לגרף של f בנקודה x_0. ז"א שמשוואה של גרף ישר משיק לפונקציה $y = f(x)$ הוא הישר שמתקבל מהמשוואה $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. בעצם להתעלם מ$o(t)$.

בתור דוגמא נביט ב$f(x) = |x|$ שאין לה נגזרת בנקודה המינימום שלה, בשפיץ.

<u>משמעות גיאומטרית לדיפרנציאל</u> : (מהלוח בכיתה, באופן כללי ניסה להראות שמדובר בשיפוע המשיק)