שיעורי בית מספר 4

1. יהיו $\mathbb{R}^4 \supseteq \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = S$. מצאו בסיס ל $W = S^{\perp}$.
(כאשר $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלארית).

2. סטודנט סקרן החליט לבדוק מה עומד מאחורי הצלחתו במבחני התואר. הוא החליט שהפרמטרים הקובעים הם: P_1 מספר השעות שהקדיש ללימוד למבחן, P_2 מספר שיעורי הבית שפתר ו P_3 מספר הספרים שהוא קרא בנושא. הוא אסף את הנתונים הבאים מ 4 קורסים שונים

	P_1	P_2	P_3	Final Grade
1	4	2	3	7
2	2	3	3	4
3	4	4	5	8
4	2	5	5	6

השאלה שעמדה בפני הסטודנט היא מה המשקל שתרם כל פרטמר לציון המבחן. הוא החליט לסמן ב x_i את המשקל שתורם פרמטר P_i לציון הסופי וניסה למצוא אותם ע"י פתירת המשוואות

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

אך לצערו, לא נמצא פתרון... הסטודנט לא אמר נואש והחליט להשתמש בידע שרכש בקורס אלגברה לינארית... הוא החליט למצוא c_1, c_2, c_3 כך שוקטור התוצאה $b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix}$ שמחושב ע"י

$$\begin{aligned} 4c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b'_1 \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= b'_2 \\ 4c_1 + 4c_2 + 5c_3 &= b'_3 \\ 2c_1 + 5c_2 + 5c_3 &= b'_4 \end{aligned}$$

יהיה הכי קרוב לוקטור התוצאה האמיתי $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. כוונתו ב"קרוב" הוא למזער את $\|b - b'\|$ (כאשר $\|*\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על

($\mathbb{R}^4$. מצאו גם אתם את $c_!, c_2, c_3$.
[הדרכה: יצגו את הבעיה כמערכת משוואת $Ax = b$ וחשבו איך הבעיה של הסטודנט שקולה למיצאת הטלה של b על איזה שהוא תת מרחב (שהוא יהיה b')... לאחר מכן פתרו את המשוואה $Ax = b'$. אזהרה: תרגיל עם חישובים לפניך]

3. יהא $V = \mathbb{R}^5$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נגדיר ב

$$W = \operatorname{span}\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ת"מ של V.

(א) מצאו בסיס אורתוגונאלי ל W ע"י שימוש בתהליך גרם שמידט על הבסיס $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(ב) מצאו את ההטלה (הניצבת/האורתוגונלית) של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ על $W' = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$
(כלומר מצאו $\pi_{W'}(v)$)

4. תהא $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ שעמודותיה בת"ל.

(א) הוכיחו כי $H^t H$ הפיכה. [הדרכה: הוכיחו תחילה כי $N(H^t H) = N(H)$).

(ב) עבור מערכת משוואת $Hx = b$ הוקטור $\tilde{x} = \left(H^t H\right)^{-1} H^t b$ נקרא קירוב הריבועים הפחותים (LSQ). הוכיחו כי $\min\left\{\sum_{i=1}^m \left(b_i - [Hx]_i\right)^2 : x \in \mathbb{R}^n\right\}$ מתקבל ב $\tilde{x}$.

5. מצאו דוגמא ל V ממ"פ ו $T : V \to V$ ה"ל ו W-ת"מ שהוא T- אינווראנטי כך ש W אינו T^*-אינווראנטי.

6. יהא $(V, \langle\rangle)$ ממ"פ ו יהא $W \leq V$ ת"מ

(א) הוכיחו כי לכל $w \in W$ ולכן $v \in V$ מתקיים כי $\langle w, \pi_W(v)\rangle = \langle w, v\rangle$

(ב) יהא $T : V \to V$ אופרטור כך ש W הוא T-אינווראנטי. נגדיר $T|_W : W \to W$ את הצמצום של T ל W. הוכיחו כי $(T|_W)^* : W \to W$ היא $(T|_W)^* = \pi_W \circ T^*$.