פתרון תרגיל 2 – חשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

1. היעזרו באינטגרלים מסוימים מתאימים על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

(א) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$$

פתרון: נשים לב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר $f(x)=x^2$, שהיא פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית שם. נשים לב שבגבול האחרון מופיע סכום רימן של f עבור החלוקה T_n שבה $x_i=\frac{i}{n}$ ($i=0,1,\ldots,n$) ובחירת נקודת הקצה הימנית מכל קטע. כיוון שסדרת החלוקות $\{T_n\}$ נורמלית, סכומי רימן שואפים לאינטגרל המסוים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(ב) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$$

פתרון: נשים לב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. זוהי פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית שם. נשים לב שבגבול האחרון מופיע סכום רימן של f עבור החלוקה T_n שבה $x_i=\frac{i}{n}$ ($i=0,1,\ldots,n$) ובחירת נקודת הקצה הימנית מכל קטע. כיוון שסדרת החלוקות $\{T_n\}$ נורמלית, סכומי רימן שואפים לאינטגרל המסוים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

2. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le\ln n\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

הוכחה: עבור $n=1$ – טריוויאלי (כל הביטויים מתאפסים). נניח $n>1$ טבעי:

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בקטע $[1,n]$ ולכן אינטגרבילית שם. נתבונן בחלוקה T של הקטע שבה $x_i = 1+i$ ($i = 0,1,\ldots,n-1$) ו־$\Delta x = 1$ עבור כל תת־קטע. כיוון ש־$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע, סכומי דרבו של החלוקה מתקבלים עבור בחירת נקודות הקצה:

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{1+i} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\overline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \cdot f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{1+(i-1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

כעת, לפי משפט, $\underline{S}(T) \le \int_1^n f(x)dx \le \overline{S}(T)$. נחשב את האינטגרל המסוים:

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln x|_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n$$

ובסה"כ נציב ונקבל

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \ln n \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

כדרוש.

3. הפונקציה f רציפה ואי־שלילית בקטע $[a,b]$ ומקיימת $\int_a^b f(t)dt = 0$. הוכיחו כי $f \equiv 0$ ב־$[a,b]$.

הצעה: היעזרו בפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

הוכחה: הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, לכן לפי המשפט היסודי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ גזירה בקטע ונגזרתה $F'(x) = f(x)$. כיוון ש־f אי־שלילית בקטע, $F'(x) \ge 0$, כלומר $F(x)$ מונוטונית לא יורדת. כעת, $F(a) = 0$ ולפי הנתון גם $F(b) = 0$, כלומר $F(a) = F(b)$. לכן F בהכרח קבועה בקטע, ו־$f(x) = F'(x) \equiv 0$ כדרוש.

4. עבור איזה ערך של x האינטגרל $\int_x^{x+3} t\cdot(5-t)dt$ מקבל ערך מקסימלי? מהו הערך המקסימלי?

פתרון: נסמן $F(x) = \int_x^{x+3} t\cdot(5-t)dt$. אפשר לרשום את F גם באופן הבא:

$$F(x) = \int_0^{x+3} t\cdot(5-t)dt - \int_0^x t\cdot(5-t)dt$$

האינטגרנד $f(t) = t\cdot(5-t)$ רציף בכל נקודה והפונקציה $u(x) = x+3$ גזירה, לכן לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת, F גזירה בכל נקודה ונגזרתה:

$$F'(x) = \frac{d}{du}\left(\int_0^u t\cdot(5-t)dt\right)\cdot\frac{du}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\int_0^x t\cdot(5-t)dt\right) =$$

$$= u(5-u) - x(5-x) = (x+3)(2-x) - x(5-x) = -6x+6$$

הנק' החשודות לקיצון הן אלו בהן $F'(x) = 0$, כלומר רק $x = 1$, והיא אכן נקודת מקסימום, כי $F''(1) = -6 < 0$. כיוון שהיא היחידה, $F(x)$ מקבלת ערך מקסימלי עבור $\boldsymbol{x = 1}$. הערך המקסימלי:

$$F(1) = \int_1^4 t\cdot(5-t)dt = \int_1^4 (5t-t^2)dt = \left.\frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right|_1^4 = \frac{5\cdot 16}{2} - \frac{4^3}{3} - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\right) = \mathbf{16.5}$$

הערה: שימו לב שהאינטגרנד הוא פרבולה "עצובה" שקודקודה ב־$x = 2.5$, לכן היה צפוי שהאינטגרל המסוים יקבל ערך מקסימלי בדיוק באינטרוול $[1,4]$ – אינטרוול באורך 3 שהקודקוד במרכזו.

5. (א) גזרו את הפונקציה $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t} dt$.

פתרון: אם נסמן $u(x) = x^2$ ונגדיר $I(u) = \int_0^{u} \frac{\sin t}{1+t} dt$, אז $F(x) = I(u(x))$. הפונקציה $u(x)$ גזירה בכל נקודה, $u(x) \geq 0$ ובתחום $t \geq 0$ האינטגרנד $f(t) = \frac{\sin t}{1+t}$ רציף. לכן לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת:

$$F'(x) = I'(u) \cdot u'(x) = \frac{\sin u}{1+u} \cdot 2x = \frac{\sin(x^2)}{1+x^2} \cdot 2x = \boldsymbol{\frac{2x\sin(x^2)}{1+x^2}}$$

(ב) חשבו את הגבול $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t} dt$.

פתרון: נשים לב:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t} dt = \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^4}$$

לפי המשפט היסודי $F(x)$ רציפה בנקודה $x = 0$ (ואפילו גזירה), לכן $\lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$. לכן זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, ובעזרת כלל לופיטל נקבל

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x\sin(x^2)}{1+x^2}}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$