פתרון תרגיל 6

<u>שאלה1</u>

א) בדקו שלכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n})=a+5^{n+1}\mathbb{Z}$. מכאן $B=\{a+5^n\mathbb{Z}:\quad a\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\}=\left\{B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n}):\quad a\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$. ברור שלכל $a\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n})$ קבוצה פתוחה. כמו כן, לכל U פתוחה ולכל $a\in U$, קיים $\varepsilon>0$ כך ש $a\in B_{d_5}(a,\varepsilon)\subseteq U$. אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{5^n}<\varepsilon$. מכאן $a\in B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n})\subseteq B_{d_5}(a,\varepsilon)\subseteq U$. כלומר, לכל U פתוחה ולכל $a\in U$ קיימת קבוצה $V\in B$ כך ש $a\in V\subseteq U$. בסך הכל נסיק ש $B=\{a+5^n\mathbb{Z}:\quad a\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\}=\left\{B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n}):\quad a\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$ בסיס ל $(\mathbb{Z},d_5)$.

ב) מ"ל שכל הקבוצות בבסיס הנ"ל הן סגורות. כזכור, $(\mathbb{Z},d_5)$ הוא מרחב אולטרא מטרי כלומר מרחב שבו מתקיים במקום אי שוויון המשולש תכונה חזקה יותר: $d(x,z)\le\max\{d(x,y),d(y,z)\}$ (ראו תרגיל בית 1 שאלה 2) .

נוכיח טענה כללית: במרחב אולטראמטרי כל כדור פתוח הוא קבוצה סגוחה.

הוכחה: יהי (X,d) מ"מ. $\varepsilon>0$, $x\in X$. נוכיח ש $B(x,\varepsilon)$ קבוצה סגוחה.

$B(x,\varepsilon)$ קבוצה פתוחה שכן ראיתם שבכל מ"מ כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

נוכיח ש $B(x,\varepsilon)$ גם קבוצה סגורה (כמובן בהנחה שמדובר במרחב אולטראמטרי).

נניח $\{x_n\}\subseteq B(x,\varepsilon)$ וכן $x_n\to y$ ונראה $y\in B(x,\varepsilon)$.

$x_n\to y$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ $d(x_n,y)<\varepsilon$ ובפרט $d(x_{n_0},y)<\varepsilon$.

$\{x_n\}\subseteq B(x,\varepsilon)$ ולכן $d(x_{n_0},x)<\varepsilon$. מתקיים $d(x,y)\le\max\{d(x,x_{n_0}),d(x_{n_0},y)\}<\varepsilon$

ומכאן $y\in B(x,\varepsilon)$ והוכחנו שהקבוצה $B(x,\varepsilon)$ גם סגורה ובסה"כ סגוחה.

מכיון ש$\left(\mathbb{Z},d_5\right)$ הוא מרחב אולטרא מטרי נסיק באמצעות הטענה כללית שהוכחנו וכן סעיף א' שהקבוצות בבסיס הנ"ל סגוחות ומכאן $\left(\mathbb{Z},d_5\right)$ ממימד אפס.

<u>שאלה 2</u>

א. נניח בשלילה שהפנים לא ריק. אזי קיימת $a\in \operatorname{int}\left(A\right)$. אזי קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B(a,\varepsilon)=\left(a-\varepsilon,a+\varepsilon\right)\subseteq A$. אך מתקיים $\left|A\right|\le\aleph_0$ ועם זאת $\left|\left(a-\varepsilon,a+\varepsilon\right)\right|=\aleph$ וזאת סתירה.

ב. $\operatorname{int}\left(\mathbb{Q}\right)=\varnothing$ ברור מא'

$cl\left(\mathbb{Q}\right)=\mathbb{R}$: $cl\left(\mathbb{Q}\right)\subseteq\mathbb{R}$ ברור. נותר להראות את ההכלה ההפוכה. אך ראיתם באינפי' כי לכל ממשי יש סדרת איברים רציונאליים המתכנסת אליו.

ג. תהי $p_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ההטלה על הרכיב הראשון. A סגורה שכן: $A=p_1^{-1}\left(\left\{0\right\}\right)$.

נוכיח שהפנים ריק: תהי $a=\left(0,a_2,...,a_n\right)\in A$ ונראה ש-$a\notin\operatorname{int}\left(A\right)$. יש להראות שלכל $\varepsilon>0$ $B\left(a,\varepsilon\right)\not\subset A$. למשל: $\left(\frac{\varepsilon}{2},a_2,...,a_n\right)\in B\left(a,\varepsilon\right)\setminus A$.

<u>שאלה 3</u>

נראה קודם דוגמא נגדית במרחב מטרי שאינו נורמי: נבחר $X=\left\{a,b\right\}$ עם המטריקה הדיסקרטית: $d\left(a,b\right)=1$. אזי נבחר את הכדור הפתוח $B\left(a,1\right)$ ומתקיים $B\left(a,1\right)=\left\{a\right\}$ ולכן סגור.

שימו לב: שסגור של קבוצה סגורה הוא הקבוצה עצמה ולכן $cl\left(B\left(a,1\right)\right)=cl\left(\left\{a\right\}\right)=\left\{a\right\}$ (כמו כן, יכולתם לראות שזה הסגור דרך הקריטריון של הסדרות). מאידך, $B\left[a,1\right]=\left\{a,b\right\}$.

כעת נוכיח את הטענה במרחב נורמי:

נוכיח הכלה דו כיוונית:

$cl\left(B\left(a,r\right)\right)\subseteq B\left[a,r\right]$ - שימו לב שהכלה זו נכונה בכל מרחב מטרי, לאו דווקא מרחב נורמי. מתקיים $B\left(a,r\right)\subseteq B\left[a,r\right]$, הוכחתם ש-$B\left[a,r\right]$ היא קבוצה סגורה בכל מרחב מטרי ולכן $cl\left(B\left(a,r\right)\right)\subseteq B\left[a,r\right]$.

$cl\left(B\left(a,r\right)\right)\supseteq B\left[a,r\right]$ - שימו לב שהכלה זו אינה נכונה בכל מרחב מטרי (ראו דוגמא נגדית) אך כן נכונה בכל מרחב נורמי. יהי $x\in B\left[a,r\right]$ ונראה שיש סדרה ב- $B\left(a,r\right)$ שמתכנסת אליו.

<u>מוטיבציה לבחירת הסדרה:</u> $x\in B\left[a,r\right]$ ולכן $\left\|x-a\right\|\le r$ ואז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(x-a\right)\right\|=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\|x-a\right\|<r$. ז"א, אנחנו מחפשים סדרה $\left\{y_n\right\}$ כך ש- $y_n-a=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(x-a\right)$ ואז יהי מובטח ש- $y_n\in B\left(a,r\right)$. מהעברת אגפים נקבל את הסדרה:

$B\left(a,r\right)\supseteq\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{a}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{y_n\right\}$. מתקיים $y_n\to x$ שכן:

$$\left\|y_n-x\right\|=\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(x-a\right)\right\|=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\|x-a\right\|\xrightarrow{n\to\infty}0$$
$$\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 0,\left\|x-a\right\|\le r\right)$$

<u>שאלה 4</u>

א. F סגורה ב-$\left(X,T_1\right)$ ולכן $F^C\in T_1$ ולכן $F^C\in T_2$ ולכן F סגורה ב-$\left(X,T_2\right)$.

ב. $\operatorname{int}_{T_1}\left(A\right)\subseteq\operatorname{int}_{T_2}\left(A\right)$: $\operatorname{int}_{T_1}\left(A\right)=\bigcup_{T_1\ni O\subseteq A}O\underset{T_1\subseteq T_2}{\subseteq}\bigcup_{T_2\ni O\subseteq A}O$

$cl_{T_1}\left(A\right)\supseteq cl_{T_2}\left(A\right)$:

$cl_{T_2}\left(A\right)=\bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ F\text{ is closed}\\ in\left(X,T_2\right)}}F$ וגם $cl_{T_1}\left(A\right)=\bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ F\text{ is closed}\\ in\left(X,T_1\right)}}F$. כעת נשים לב שלפי א', אם $A\subseteq F$ וכן סגורה לפי T_1 אזי $A\subseteq F$ סגורה לפי T_2. לכן

$cl_{T_2}\left(A\right)=\bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ F\text{ is closed}\\ in\left(X,T_2\right)}}F\supseteq cl_{T_1}\left(A\right)=\bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ F\text{ is closed}\\ in\left(X,T_1\right)}}F$.

ג. שימו לב שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה, ולכן כל קבוצה פתוחה לפי הרגילה, פתוחה לפי סורגנפריי; וכנ"ל לגבי קבוצה סגורה (לפי סעיף א).

$\left(0,1\right)$ פתוח לפי סורגנפריי ומתקיים $\left(0,1\right)=\text{int}\left(\left(0,1\right)\right)$. מה לגבי הסגור? הקבוצה

$\left(0,1\right)$אינה סגורה, מכיוון שיש בה סדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 2}$ המתכנסת ל-0. לכן

$\left(0,1\right)\setminus cl\left(\left(0,1\right)\right)\ni 0$. מצד שני, $\left[0,1\right)$ סגור ולכן זו בהכרח הקבוצה הסגורה

המינימלית המכילה את $\left(0,1\right)$ ומכאן $cl\left(0,1\right)=\left[0,1\right)$.

$\left[0,1\right]$: זו קבוצה סגורה בטופולוגיה הרגילה ולכן סגורה גם בסורגנפריי ולכן

$cl\left[0,1\right]=\left[0,1\right]$. בנוסף, נשים לב כי זו קבוצה לא פתוחה: כי כל סביבה של 1 היא

מהצורה $\left[1,\varepsilon\right)$ עבור $\varepsilon>1$ כלשהו ולכן לא מוכלת בקבוצה. נמצא את הפנים: הפנים

הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-$\left[0,1\right]$ ולכן $\text{int}\left[0,1\right]=\left[0,1\right)$.

$\left[0,1\right)$: סגוחה (ראו את התרגיל על קשירות) ולכן $\text{int}\left(\left[0,1\right)\right)=cl\left(\left[0,1\right)\right)=\left[0,1\right)$.

$\left(0,1\right]$: ניתן לראות (משני נימוקים קודמים) שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה.

הפתוחה המקסימלית שמוכלת בתוכה היא $\left(0,1\right)$ והסגורה המינימלית שמכילה

אותה היא $\left[0,1\right]$ ולכן: $\text{int}\left(\left(0,1\right]\right)=\left(0,1\right),\quad cl\left(\left(0,1\right]\right)=\left[0,1\right]$.

שאלה 5

א. נראה שמתקיימות 3 התכונות של טופולוגיה:

1) $\varnothing\in\tau$ שכן $x_0\notin\varnothing$. $X\in\tau$ שכן $X\setminus X=\varnothing$ סופית.

2) יהיו $O_1,O_2\in\tau$. יתכנו שני מקרים:

1. $x_0\notin O_1$ או $x_0\notin O_2$. במקרה זה $x_0\notin O_1\cap O_2$ ומכאן $O_1\cap O_2\in\tau$.

2. $X\setminus O_1, X\setminus O_2$ סופיות. במקרה זה נקבל ש $X\setminus\left(O_1\cap O_2\right)=X\setminus O_1\cup X\setminus O_2$

סופית כאיחוד סופי של סופיות וגם במקרה זה נקבל ש $O_1\cap O_2\in\tau$.

3) נניח שלכל $i\in I$ מתקיים $O_i\in\tau$. יתכנו שני מקרים:

1. לכל $i\in I$, $x_0\notin O_i$ במקרה זה נקבל $x_0\notin\bigcup_{i\in I}O_i$ ומכאן $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

2. קיים i_0 כך ש $X\setminus O_{i_0}$ סופית אבל במקרה זה נסיק ש- $X\setminus\bigcup_{i\in I}O_i\subseteq X\setminus O_{i_0}$ סופית. לכן,

גם במקרה זה $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

ב. תהי $x_1 \neq x_0$ נראה ש $\{x_1\}$ סגוחה.

$\{x_1\}$ פתוחה שכן $x_0 \notin \{x_1\}$.

$\{x_1\}$ סגורה- נוכיח זאת ע"י שנראה ש $X \setminus \{x_1\}$ פתוחה. מתקיים $X \setminus (X \setminus \{x_1\}) = \{x_1\}$

סופית ולכן $X \setminus \{x_1\}$ פתוחה.

נראה כעת ש- $\{x_0\}$ סגורה ואינה פתוחה.

סגורה- בדיוק כפי שמוכיחים ש- $\{x_1\}$ סגורה. $\{x_0\}$ אינה פתוחה שכן $x_0 \in \{x_0\}$ וכמו כן

$X \setminus \{x_0\}$

אינסופית כי X אינסופית.

ג. נפרק לשני מקרים:

A סופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A$, ואנחנו נראה זאת ע"י כך שנראה כי A סגורה. ואכן,

$A = X \setminus (X \setminus A)$ סופית, לכן $X \setminus A$ פתוחה ולכן A סגורה.

A אינסופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A) = A \cup \{x_0\}$. נראה כי $A \cup \{x_0\}$ היא הקבוצה הסגורה

המינימלית המכילה את A. תחילה נשים לב כי אם A אינסופית וכן $x_0 \notin A$, אזי A אינה

סגורה. אכן, אם נניח בשלילה כי היא סגורה, נקבל ש- $X \setminus A$ פתוחה. אך $x_0 \in X \setminus A$ ולכן

בהכרח מתקיים $X \setminus (X \setminus A)$ סופית. אבל אז נקבל ש- A סופית, בסתירה לנתון.

כעת, נראה כי $A \cup \{x_0\}$ סגורה. מתקיים $x_0 \notin X \setminus (A \cup \{x_0\})$ ולכן $X \setminus (A \cup \{x_0\})$ פתוחה,

ולכן $A \cup \{x_0\}$ סגורה.

ד. גם כאן יש שני מקרים:

$X \setminus A$ סופית.

במקרה זה, A היא קבוצה פתוחה (לפי הגדרת הטופולוגיה) ולכן $int(A) = A$.

$X \setminus A$ אינסופית.

נראה שמתקיים $int(A) = A \setminus \{x_0\}$ לפי הכלה דו כיוונית.

$\supseteq$: $x_0 \notin A \setminus \{x_0\}$ ולכן $A \setminus \{x_0\}$ פתוחה ולכן מתקיימת ההכלה הדרושה.

$\subseteq$: נסמן $int(A)=\bigcup\limits_{\substack{U_i\subseteq A,\\ U_i \text{ is open in } X}} U_i$. אם $x_0\notin U_i$ לכל $i\in I$, אזי $U_i\subseteq A\setminus\{x_0\}$ ומתקיים $int(A)\subseteq A\setminus\{x_0\}$. אחרת, קיים $i\in I$ כך ש $x_0\in U_i$, בגלל ש-U_i פתוחה ב-X, נקבל ש-$X\setminus U_i$ סופית. היות ומתקיים $U_i\subseteq A$, מתקיים גם $X\setminus U_i\supseteq X\setminus A$ ומקבלים סתירה לאינסופיות של $X\setminus A$.

<u>בונוס</u>

1) ניתן להוכיח שהסדרות המתכנסות ב $\left(\mathbb{R},\tau_{co-\aleph_0}\right)$ הן הקבועות לבסוף. (בדומה להוכחה שעשינו ביחס למ"ט אחר בכיתה) . מכאן נובע שלכל $A\subseteq\mathbb{R}$ אין נקודות הצטברות סדרתיות (למה?). מצד שני אם ניקח $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אז מכיון שהסגורות במ"ט זה הן בנות המניה או $\mathbb{R}$. נסיק שלכל $a\in\mathbb{R}$ $cl(A\setminus\{a\})=\mathbb{R}$ ובפרט $a\in cl(A\setminus\{a\})$. כלומר כל נקודה ממשית היא נקודת הצטברות סדרתית של A ואף נקודה ממשית אינה נקודת הצטברות של A . לכן ניתן לבסוף לקחת בתפקיד a כל נקודה ממשית ולקבל דוגמא נגדית.

2) לא. ראינו שבמ"מ תנאים א' וב' שקולים.