תרגיל 8

שאלה 1

א. הוכיחו או הפריכו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

הוכחה:

קיים מיקום בסדרה a_n החל ממנו $|a_n|<1$. (הוכחה: $\sum |a_n|$ מתכנס בפרט $|a_n| \to 0$ ולכן מהגדרת הגבול יש $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $|a_n|<1$.)

לכן, החל מ- N זה מתקיים: $\sum a_n^2=\sum |a_n|^2<\sum |a_n|$ ולכן מהתכנסות $\sum |a_n|$ נסיק את התכנסות $\sum a_n^2$ (לפי מבחן ההשוואה הראשון לטורים חיוביים).

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

דוגמא נגדית:

נקח $a_n=\frac{1}{n}$, אז $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס אבל $\sum \frac{1}{n}$ לא מתכנס (בהחלט).

שאלה 2

א. הוכיחו או הפריכו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ מתכנס בהחלט.

הוכחה:

כיוון ש- $1+a_n^2\geq 1$ לכל n, נקבל $\frac{a_n^2}{1+a_n^2}\leq a_n^2$ לכל n. משאלה 1א' לעיל אנחנו יודעים כי $\sum a_n^2$ מתכנס לכן נקבל ממבחן השוואה ראשון לטורים חיוביים כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ מתכנס (ולכן מתכנס בהחלט – כי זה טור חיובי).

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס בהחלט.

הוכחה:

נתון כי $\sum|a_n|$ מתכנס וצריך להראות כי $\sum\frac{|a_n|}{|1+a_n|}$ מתכנס. נשתמש במבחן השוואה שני לטורים חיוביים:

$\frac{|a_n|}{\frac{|a_n|}{|1+a_n|}}=|1+a_n|\to 1$ (כיוון ש- $a_n\to 0$ מהתכנסות $\sum a_n$). לכן קיבלנו שגבול המנות בין שני הטורים היא מס' ממשי הגדול מ-0 לכן הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו, לכן אכן $\sum\frac{|a_n|}{|1+a_n|}$ מתכנס.