<u>בוחן אמצע באינפי 1</u> – תשע"א 06/12/10

***יש לנמק היטב את התשובות לכל השאלות**

***שימו לב, פיתרון שאלה אחת נוספת בחלק השני נחשב כבונוס.**

<u>חלק ראשון</u>: ציטוט הגדרות ומשפטים: (**25 נק'**)

1. צטט/י את הגדרת הגבול של סדרה

תהי סדרה a_n ויהי מספר ממשי $L \in \mathbb{R}$. אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$, אזי L הוא גבול הסדרה a_n.

2. צטט/י את שלילת הגבול של סדרה

תהי סדרה a_n ויהי מספר ממשי $L \in \mathbb{R}$. אם קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n_0 \in \mathbb{N}$ קיים $n > n_0$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \varepsilon$, אזי L אינו גבול הסדרה a_n.

בחר **3** מבין **6** הסעיפים הבאים:

3. צטט/י את ההגדרה של סדרת קושי

תהי סדרה a_n. אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > n > n_0$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$, אזי a_n נקראת סדרת קושי.

4. צטט/י את ההגדרות של תת-סדרה וגבול חלקי

תהי סדרה $\{a_n\}$, ותהי סדרה עולה ממש של אינדקסים טבעיים $\{n_k\}$ ($\forall k: n_k \in \mathbb{N}$ וגם $n_1 < n_2 < \cdots$) אזי $\{a_{n_k}\}$ תת-סדרה של $\{a_n\}$.

יהי $L \in \mathbb{R}$ מספר ממשי. אזי L גבול חלקי של סדרה, אם קיימת לה תת סדרה ששואפת אליו

5. צטט/י את ההגדרות של טור מתכנס, מתכנס בהחלט ומתכנס בתנאי

טור $\sum a_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים שלו שואפת לגבול סופי. הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס. הטור $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס, אך אינו מתכנס בהחלט.

6. צטט/י את משפט לייבניץ

תהיי a_n סדרה מונוטונית לא עולה, חיובית ושואפת לאפס $a_n \to 0$, אזי הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

7. צטט/י את משפט בולצאנו-ויירשטראס לסדרות

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת

8. צטט/י את מבחן דלאמבר להתכנסות טורים (מבחן המנה)

יהי $\sum a_n$ טור חיובי ממש אזי:

אם $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ אזי הטור מתבדר

אם $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ אזי הטור מתכנס

אחרת לא ניתן לדעת

<u>חלק שני:</u> תרגילים

בחר/י **2** מבין **3** השאלות הבאות:

9. (**20 נק'**) יהיו $A,B\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות כך שלכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים $a\le b$.
הוכח/י ש $\sup A\le\inf B$

פתרון: נניח בשלילה ש $\sup A>\inf B$ ניקח $\varepsilon=\frac{\sup A-\inf B}{2}>0$ אזי
$\frac{\sup A+\inf B}{2}=\sup A-\varepsilon$ שזה אמצע הקטע $[\inf B,\sup A]$. אבל לפי משפט קיים $a\in A$ כך
ש $a>\sup A-\varepsilon$. $\sup A-\varepsilon=\frac{\sup A+\inf B}{2}=\inf B+\varepsilon$ אבל לפי משפט קיים $b\in B$ כך ש
$b<\inf B+\varepsilon=\sup A-\varepsilon<a$. ובסיכום מצאנו $b<a$ בסתירה לנתון.

10. תהי $\{a_n\}$ סדרה כך $\forall n: a_n\neq 0$, המקיימת $\forall n:\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$

א. (**5 נק'**) **הוכח או הפרך:** $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$

הפרכה: ניקח את הסדרה $a_n=1-\frac{1}{n}$ זו סדרה חיובית ומונוטונית עולה ולכן מקיימת $\forall n:\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$.

נסתכל על $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1-\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2}{n^2-1}=1$ ולכן לא מתקיים
$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$.

ב. (**15 נק'**) **הוכח או הפרך**: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר (רמז: **אל** תשתמש/י בסעיף א')

הוכחה: $|a_n|$ מונוטונית עולה לפי הנתון, כמו כן $a_1 \neq 0$. לכן ביחד $\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n| \geq |a_1| > 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

11. (**20 נק'**) **הוכח**: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס **אם"ם** הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס לכל סדרה חסומה b_n

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח שהטור מתכנס כלומר $\sum|a_n| < \infty$. תהי b_n סדרה חסומה כלשהי, לכן קיים k כך ש $|b_n| \leq k$ ולכן $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq k|a_n|$ ולפי מבחן ההשוואה $\sum|a_n b_n| < \infty$ ולפי סעיף א' גם $\sum a_n b_n$ מתכנס.

$\Rightarrow$ ניקח את הסדרה $b_n = \frac{|a_n|}{a_n}$. $|b_n| = \left|\frac{|a_n|}{a_n}\right| = 1$ לכן b_n סדרה חסומה. ולכן לפי הנתון $\sum a_n b_n < \infty$ אבל $\sum a_n b_n = \sum a_n \frac{|a_n|}{a_n} = \sum|a_n|$ כלומר $\sum a_n$ מתכנס בהחלט כפי שרצינו.

<u>חלק שלישי:</u> גבולות של סדרות והתכנסות טורים:

12. (**18 נק'**) מצא/י את גבולות הסדרות הבאות:

א. $a_n = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n-3}}$

פתרון: $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^{n-3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}^n 2^3}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 8\cdot 0 = 0$

כי $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ ולמדנו ש $\lim_{n\to\infty}\alpha^n = 0$ כאשר $|\alpha| < 1$

ב. $a_n = \frac{\sin(n!) - \cos(n^n)}{n}$

פתרון: $|\sin(n!) - \cos(n^n)| \leq |\sin(n!)| + |\cos(n^n)| \leq 1 + 1 = 2$ לכן זו סדרה חסומה. $\frac{1}{n} \to 0$ ולכן סה"כ יש לנו סדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס, והמכפלה שואפת לאפס לפי תרגיל שראינו.

ג. $a_{n+1}=\frac{|a_n|}{2}+1$, נתון ש a_n מתכנסת

פתרון: נתון $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ לאיזה מספר ממשי L. מכיוון a_{n+1} הוא סכום של חיוביים, אזי $0 \le \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$. כמו כן, לפי תרגיל שראינו, $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |L|$. ניקח גבול לשני אגפי המשוואה $a_{n+1}=\frac{|a_n|}{2}+1$ לקבל $L=\frac{|L|}{2}+1$. מכיוון ש $L\ge 0$ אז $L=\frac{L}{2}+1$ ולכן $L=2$.

13. (**18 נק'**) קבע/י לגבי **3** מתוך **4** הטורים הבאים הם מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$

פתרון: דבר ראשון נבדוק התכנסות בהחלט. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-1}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$, זה טור הנדסי עם $q=e^{-1}<1$ ולכן כפי שראינו בכיתה מתכנס, ולכן הטור כולו מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס ואין מה להמשיך לבדוק).

ב. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$

פתרון: קל לראות ש $\frac{1}{n\ln n}$ סדרה מונוטונית יורדת לאפס חיובית, (כי גם n וגם $\ln n$ מונוטוניות עולות לאינסוף). לכן נפעיל את מבחן העיבוי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln\left(2^n\right)}$ מתכנס. אבל זה שווה ל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2} = \sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln\left(2^n\right)}$ וזה מתבדר ולכן כך גם הטור אינו מתכנס בהחלט.

מכיוון שאילו גם תנאי משפט לייבניץ (לא עולה ושואפת לאפס), הטור מתכנס בתנאי.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\arctan(\ln(n^n)))}{n\sqrt{n}}$

פתרון: $\left|\frac{\sin(\arctan(\ln(n^n)))}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1.5}}$ אבל למדנו ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס אם"ם $\alpha > 1$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון (הרי אלו טורים חיוביים) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(\arctan(\ln(n^n)))}{n\sqrt{n}}\right|$ מתכנס, כלומר הטור המקורי מתכנס בהחלט.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

פתרון: $\left|\frac{(-1)^n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right| = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1}{1} = 1 \ne 0$ לכן גם $\frac{(-1)^n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \not\to 0$ ולכן הטור מתבדר