תרגיל 6

להגשה בכ' כסליו (4.12) או כ"ב כסליו (6.12) - כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. יהא $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{R}$.

(א) מצא לאילו ערכי a הקבוצה $S=\{\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2a-5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}\subset V$ בת"ל?

פתרון: נתאים לכל מטריצה וקטור מתאים ונשים את הוקטורים כעמודות מטריצה.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ a & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a-5 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & a \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2a-5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a-6 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 2a-6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 2a-6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

אם $a=3$ אזי $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ והוקטורים יהיו ת"ל

אם $a\neq 3$ אזי $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ והוקטורים יהיו בת"ל

(ב) איך התשובה לסעיף (א) היתה משתנת אם היינו חושבים על $S\subset V'=\mathbb{C}^{2\times 2}$ כמטריצות מרוכבות?

פתרון: ללא שום שינוי.

2. יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מעל $\mathbb{R}$.

$$S=\{p_1=1+x+x^2+x^3,p_2=-1+x^2,p_3=1-x+x^2-x^3\}$$

(א) האם $1 \in span(S)$?

פתרון: ש"ל האם ל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ יש פתרון. נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ויש פתרון ולכן התשובה היא כן

(ב) מצא $span(S)$ (אלו תנאים $p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in span(S)$ צריך לקיים)

פתרון: נדרג $\to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & -1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 2 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -2 & d-a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 4 & c+a-2b \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{array}\right)$$

ולכן יש פתרון רק אם $b - d = 0$

כלומר $span(S) = \{a+bx+cx^2+dx^3 | b-d=0\} = \{a+bx+cx^2+bx^3\}$

(ג) האם Sבת"ל ?

פתרון: נציב בוקטור הפתרון את וקטור האפס (שמייצג את פולינום האפס) ונקבל לאחר דירוג:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שזה גורר שרק הפתרון הטרוויאלי פותר את המערכת

כלומר S בת"ל.

(ד) השלם את S לבסיס ל- V כלומר מצא $S \subset S'$כך ש S' בסיס ל V.

פתרון: ניקח $x^3 \notin span(S)$ (לפי סעיף ב) ואז

$S = \{p_1 = 1+x+x^2+x^3, p_2 = -1+x^2, p_3 = 1-x+x^2-x^3, p_4 = x^3\}$

קבוצה בעלת 4 איברים בת"ל ולכן עפ"י משפט השלישי חינם בסיס.

3. יהיה $V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^t = A\}$מרחב המטריצות הסימטריות הממשיות .

(א) מצא בסיס ל V. מהו המימד של V.

פתרון: כל מטריצה סימטרית היא מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ולכן

$$V=\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a,b,d\in\mathbb{R}\}=$$
$$\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,d\in\mathbb{R}\}$$
$$=span_{\mathbb{R}}\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$
בנוסף קל לראות כי אכן המטריצות בת"ל ולכן בסיס. מסקנה $dim_{\mathbb{F}}V=3$.

(ב) תהא $S=\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\}\subset V$. מצא את $span(S)$.

פתרון: כמו בסעיף הראשון נעבוד עם המטריצה המתאימה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & -1 & b \\ 5 & 2 & d \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 2 & d-5a \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-7a+2b \end{array}\right)$$

כלומר $span(S)=\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid d-7a+2b=0\}=\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & 7a-2b \end{pmatrix}\}$

4. תהא $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה משולשים עליונה כך שאברי האלכסון שלה שונים מ־0.

(א) הוכח כי שורות U בת"ל.

פתרון: $U=\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ כאשר $a_{ii}\neq 0$ ולכן הפתרון למערכת $Ux=0$ הוא רק הפתרון הטריוואלי.

(ב) הסק כי שורות U מהווים בסיס ל $\mathbb{C}^n$.

פתרון: $S=\{R_1(U),\dots R_n(U)\}\subset\mathbb{C}^n$.
ב S יש n שורות והן בת"ל (לפי סעיף קודם) ולכן לפי משפט השלישי חינם הן בסיס $\mathbb{C}^n$

5. תזכורת: V יקרא נוצר סופית אם $dim_{\mathbb{F}}V<\infty$

(א) יהיה V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. W תת מרחב. הוכח כי $dim_{\mathbb{F}}W\leq dim_{\mathbb{F}}V$

פתרון: נבחר בסיס ל W. $B_W=\{w_1,\dots w_k\}$ אם $span(B_W)=V$ אזי $dim_{\mathbb{F}}V=dim_{\mathbb{F}}W=k$.
אחרת נבחר $v_1,\dots v_l\in V\backslash span(B_W)$ ונשלים לבסיס ל V $B_V=\{w_1,\dots w_k,v_1\dots v_l\}$.
ואז $dim_{\mathbb{F}}W=k<k+l=dim_{\mathbb{F}}V$.

(ב) הפרך: ניתן לייצר בסיס לתת מרחב מוקטורים של בסיס של המרחב.
כלומר שבהנתן $W\subset V$ תת מרחב B_V בסיס ל V
ייתכן כי לא קיימת $B_W\subset B_V$ כך ש B_W בסיס ל W

פתרון: נסתכל ב $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $B_V=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

נתסכל ב $W=span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ אזי ברור ש $B_W=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}\not\subset B_V$

6. תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S=\{v_1,\dots v_n\}$. נניח v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.

הוכח ש $span(S)=spab(S^{'})$ כאשר $S^{'}=\{v_1,\dots v_{n-1}\}$

הוכחה: ($\supseteq$) ברור כי כל צ"ל של איברי $S^{'}$ בפרט צ"ל של איברי S.

($\subseteq$) נניח $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots\alpha_{n-1}v_{n-1}=v_n$ כי נתון v_n ת"ל בוקטורים האחרים

כעת יהי $\beta_1 v_1+\cdots\beta_{n-1}v_{n-1}+\beta_n v_n\in span(S)$

$$\beta_1 v_1+\cdots\beta_{n-1}v_{n-1}+\beta_n v_n=$$
$$\beta_1 v_1+\cdots\beta_{n-1}v_{n-1}+\beta_n(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots\alpha_{n-1}v_{n-1})=$$
$$(\beta_1+\beta_n\alpha_1)v_1+\cdots(\beta_{n-1}+\beta_n\alpha_{n-1}))v_{n-1}\in span(S')$$

בהצלחה!