

בס"ד

כז' אדר א' התשע"ד
(27.2.14 למנינם)

אלגברה לינארית להנדסה בר –אילן
83-110-01
מועד ב' התשע"ד

ד"ר מיטל אליהו רובינסון.
מתרגלים : אחיה בראון, גילי גולן.

זמן הבחינה : 3 שעות.

תכננו את הזמן של הבחינה!!! אל תבזבזו זמן יקר על שאלה מסויימת!

יש לכתוב את הפתרון מתחת לכל שאלה. המחברת תשמש כטיוטה בלבד ולא תיבדק.
מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד!
ניתן לצבור לכל היותר 110 נקודות בבחינה אך הציון המרבי הוא 100.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

בדעל חדו!

שאלה	ניקוד
חלק א' : הוכחות שאלות 1-2	
חלק ב' : אמריקאיות שאלות 3-7	
8	
9	
10	
סה"כ	

בס"ד

חלק א' - יש לענות כאן!!!

פתרו **אחת** משתי השאלות הבאות : (20 נק')

1. הוכיחו : $|A| = |A^t|$

2. הוכיחו : $A \in F^{n \times n}$ הפיכה משמאל אזי A הפיכה מימין.

חלק ב- שאלות אמריקאיות (30 נק')

3. תהי A מטריצה מדורגת קנונית. נבצע על A את פעולת השורה $R_2 - 5R_3 \rightarrow R_2$

- ונקבל את המטריצה B .
- איזה מבין הטענות הבאות נכונה.
- (א) B מטריצה מדורגת קנונית.
- (ב) B מטריצה מדורגת אבל לא מדורגת קנונית.
- (ג) B מטריצה מדורגת. ייתכן שהיא מדורגת קנונית וייתכן שלא.
- (ד) B אינה מדורגת.

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד 5 ותהי $A \subseteq V$ קבוצה פורשת. איזה מהטענות הבאות נכונה בוודאות?

- (א) אם נוסף ל A איבר, היא כבר לא תהיה פורשת.
- (ב) אם נוריד מ A איבר, היא כבר לא תהיה פורשת.
- (ג) אם נוסף ל A איבר היא תהיה תלויה לינארית.
- (ד) A קבוצה תלויה לינארית

5. תהי $A \in F^{n \times n}$ מטריצה ותהי P הצורה המדורגת קנונית שלה. איזה מהטענות הבאות נכונות?

- (א) $R(A) = R(P)$ ו $C(A) = C(P)$
- (ב) $C(A) = C(P)$ אבל לא בהכרח מתקיים $R(A) = R(P)$.
- (ג) $R(A) = R(P)$ אבל לא בהכרח מתקיים $C(A) = C(P)$.
- (ד) לא בהכרח מתקיים $R(A) = R(P)$. לא בהכרח מתקיים $C(A) = C(P)$.

6. תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times 4}$ מטריצה ששורותיה בלתי תלויות לינארית. נתון כי הפתרון של מערכת

$$Ax = b \text{ הוא } t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

מהו m ? (מספר השורות של A).

- (א) 4
- (ב) אין מספיק נתונים כדי לדעת בוודאות.
- (ג) 3
- (ד) 2

7. יהי V מרחב וקטורי ממימד 4 ו W מרחב וקטורי ממימד 2. תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית שאינה העתקת האפס. מהן האפשרויות עבור $\dim(\ker T)$?

- (א) $\dim(\ker T) = 2$.
- (ב) כל מספר בתחום $\{2,3\}$.
- (ג) כל מספר בתחום $\{1,2,3\}$.
- (ד) כל מספר בתחום $\{2,3,4\}$.

$$8. \text{ נתונה המטריצה : } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

- א. מצאו פולינום אופייני וע"ע של A . (4)
- ב. מצאו בסיס למרחב העצמי של כל אחד מהע"ע. (6)
- ג. האם המטריצה לכסינה ליכסון מיוחד? נמקו! – אם כן – מצאו את המטריצה האלכסונית D וההפיכה P - לפי הלכסון המיוחד, אם לא-נמקו לפי משפטים שלמדנו בכיתה. (8)
- ד. אין קשר לסעיפים הקודמים: תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כלשהי. הוכיחו כי קבוצת המטריצות: $\{I, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$ היא ת"ל והסיקו כי לכל $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ קיים פולינום $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ כך ש $f(A) = 0$ (12)

9. המטריצה המייצגת של $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ היא T : $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את $T(x, y, z) = ?$ (3)

ב. מצאו בסיס לגרעין ולתמונה של T . (5)

ג. מצאו העתקה שונה $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שיש לה את אותו גרעין ואותה תמונה. (7)

10. אין קשר בין הסעיפים!

א. יהיו $A, B, C \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ המקיימות: $\det A = 5, B + 2A^{-1} = 0, C - A^3 B^t = 0$.

חשבו את $\det(\text{adj}C)$ (5).

ב. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: מצאו בסיס אורתונורמלי ל $C(A)$ ומצאו את ההיטל

של הוקטור $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ על $C(A)$ (10)