

מבוא לחוגים ומודולים
מערכי תרגול קורס 88-212

מהדורת קריאה מוקדמת

יוני 2017, גרסה 1.1

תוכן העניינים

3	מבוא	
4	תרגול ראשון	1
6	תרגול שני	2
8	תרגול שלישי	3
10	תרגול רביעי	4
11	תרגול חמישי	5
13	תרגול שישי	6
15	תרגול שביעי	7
17	תרגול שמיני	8
18	תרגול תשיעי	9
20	תרגול עשירי	10
22	תרגול אחת עשר	11

מבוא

כמה הערות טכניות לתחילת הקורס:

- דף הקורס נמצא באתר www.math-wiki.com.
- שאלות בנוגע לחומר הלימודי מומלץ לשאול בדף השיחה באתר של הקורס.
- הקפידו למלא את דו"ח תרגיל הבית.
- החומר בקובץ זה נאסף מכמה מקורות, ומבוסס בעיקרו על מערכי תרגול קודמים כשהקורס נקרא "אלגברה מופשטת 2".
- נשתדל לכתוב בגופן הזה כשהגדרות ומושגים חשובים מופיעים בפעם הראשונה. נוסיף בצד גם את השם באנגלית, שעשוי לעזור כשמחפשים חומר נוסף שאינו בעברית.
- נשמח לכל הערה על מסמך זה.

מחבר בשנת הלימודים תשע"ז: תומר באואר

1 תרגול ראשון

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1. חוג בלי יחידה $(R, +, \cdot, 0)$ הוא מבנה אלגברי המקיים:

1. $(R, +, 0)$ הוא חבורה אבלית. נקראת החבורה החיבורית של החוג.

2. (R, \cdot) הוא חבורה למחצה.

3. מתקיים חוג הפילוג (משמאל ומימין). כלומר לכל $a, b, c \in R$ מתקיים

$$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac$$

כאשר ההקשר ברור, נכתוב רק R במקום $(R, +, \cdot, 0)$.

הגדרה 1.2. יהי R חוג בלי יחידה. לכמה סוגים מיוחדים של חוגים יש שם משלהם:

Commutative

1. R הוא חילופי אם (R, \cdot) היא חבורה למחצה חילופית.

Ring

2. R הוא חוג (או חוג עם יחידה כשהבדל חשוב), אם (R, \cdot) מונואיד. איבר היחידה של המונואיד נקרא גם היחידה של החוג.

Unital ring

Division ring

3. R הוא חוג חילוק אם $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ חבורה.

Field

4. R הוא שדה אם $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ הוא חבורה אבלית.

דוגמה 1.3. הרבה מבנים אלגבריים שפגשתם הם חוגים. למשל

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ הוא חוג חילופי עם יחידה. למה הוא לא שדה?

2. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ הוא חוג חילופי בלי יחידה.

3. $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ הוא חוג חילופי עם יחידה. עבור n ראשוני, אפילו מדובר בשדה.

4. \mathbb{Q} ו- \mathbb{R} הם שדות עם הפעולות הרגילות של חיבור וכפל.

5. הקוטרניונים הרציונליים והקוטרניונים הממשיים הם חוגי חילוק לא חילופיים.

עוד בדוגמה 1.12

6. תהי X קבוצה. אז $(P(X), \Delta, \cap)$ הוא חוג חילופי עם יחידה, כאשר $P(X)$ זו קבוצת החזקה של X , Δ זו פעולת ההפרש הסימטרי, הקבוצה הריקה היא איבר האפס ו- X הוא איבר היחידה. האם זה שדה?

Left invertible

הגדרה 1.4. יהי R חוג. איבר $a \in R$ נקרא הפיך משמאל (מימין) אם קיים $b \in R$ כך ש- $ab = 1$ $ba = 1$.

Unit

כמו בקורס מבוא לתורת החבורות, איבר הוא הפיך אם הוא הפיך משמאל ומימין, ובמקרה כזה ההופכי הוא יחיד. את אוסף האיברים ההפיכים נסמן R^\times (זה לא חוג! רק תת-חבורה כפלית).

דוגמה 1.5. נסמן $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. לגבי הפעולות הרגילות של חיבור וכפל זה שדה. בהמשך נוכל להבין את הסימון בתור פולינומים ב- $\sqrt{2}$ עם מקדמים רציונליים. קל לראות שכל הדרישות של שדה מתקיימות, ואנחנו נראה רק סגירות להופכי.

יהי $a + b\sqrt{2} \neq 0$ אז

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} \cdot \frac{a - b\sqrt{2}}{a - b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

תרגיל 1.6. הראו כי החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ אינו שדה, אבל שעדין יש בו אינסוף איברים הפיכים.

Left zero divisor

הגדרה 1.7. יהי R חוג. איבר $a \in R$, $a \neq 0$ נקרא מחלק אפס שמאלי (ימני) אם קיים $b \neq 0$ כך ש- $ab = 0$ (או $ba = 0$).

Domain

הגדרה 1.8. חוג ללא מחלקי אפס נקרא תחום. תחום חילופי נקרא תחום שלמות.

Integral domain

דוגמה 1.9. מצאו חוגים שאינם תחומים, תחומים שאינם תחומי שלמות ותחומי שלמות.

1. \mathbb{Z} הוא תחום שלמות.

2. \mathbb{Z}_6 אינו תחום כי $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{6}$.

3. לכל חוג חילופי R ו- $n > 1$, החוג $M_n(R)$ אינו תחום.

4. חוג עם חילוק הוא תחום.

1.2 תת-חוגים

Subring

הגדרה 1.10. יהי R חוג. תת-קבוצה $S \subseteq R$ נקראת תת-חוג אם היא חוג לגבי הפעולות המושרות מ- R וכוללת את איבר היחידה של R .

Subrng

אם R חוג בלי יחידה, אז תת-קבוצה $S \subseteq R$ נקראת תת-חוג בלי יחידה של R אם היא חוג בלי יחידה לגבי הפעולות המושרות מ- R . שימו לב שאין מניעה כי S היא בעצמה חוג עם יחידה (אבל לאו דווקא היחידה של R).

1.11. טענה $S \subseteq R$ תת-קבוצה $\emptyset \neq S \subseteq R$ היא תת-חוג בלי יחידה של R אם ורק אם לכל $a, b \in S$ מתקיים $ab, a - b \in S$.

דוגמה 1.12. הקוטרניונים הממשיים הם דוגמה לחוג חילוק לא חילופי, שאפשר לחשוב עליהם כתת-חוג

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$$

נסו לבנות אותם גם כתת-חוג של $M_4(\mathbb{R})$. אם נסמן

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

אז $\mathbb{H} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{1, i, j, k\}$ ומתקיים $Z(\mathbb{H}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{1\} \cong \mathbb{R}$.

2 תרגול שני

הגדרה 2.1. יהיו R, S חוגים. נאמר כי $\varphi: R \rightarrow S$ הוא הומומורפיזם של חוגים אם:
 Ring homomorphism

$$1. \text{ לכל } x, y \in R \text{ מתקיים } \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

$$2. \text{ לכל } x, y \in R \text{ מתקיים } \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

3. $\varphi(1_R) = 1_S$. אם מוותרים על הדרישה הזו נאמר כי φ הוא הומומורפיזם של חוגים בלי יחידה.

דוגמה 2.2. הומומורפיזם האפס $\varphi(r) = 0_S$ לכל $r \in R$ הוא הומומורפיזם של חוגים בלי יחידה.

דוגמה 2.3. הומומורפיזם על נקרא אפימורפיזם או הטלה. למשל $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ המוגדר לפי $\varphi(x) = x \pmod{n}$ הוא אפימורפיזם של חוגים.
 Epimorphism Projection

2.4. יהיו R, S חוגים עם יחידה, ויהי $\varphi: R \rightarrow S$ אפימורפיזם של חוגים בלי יחידה. הוכיחו כי φ אפימורפיזם של חוגים.

הוכחה. מפני ש- φ על, אז קיים $a \in R$ כך ש- $\varphi(a) = 1_S$. לכן

$$\varphi(1_R) = 1_S \cdot \varphi(1_R) = \varphi(a)\varphi(1_R) = \varphi(a \cdot 1_R) = \varphi(a) = 1_S$$

ולכן $\varphi(1_R) = 1_S$. כלומר זה אפימורפיזם של חוגים.
 מה היה קורה אילו רק דרשנו ש- S הוא חוג בלי יחידה? הוכיחו שאז S הוא עדין חוג עם יחידה. \square

דוגמה 2.5. הומומורפיזם חח"ע נקרא מונומורפיזם או שיכון. למשל $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ המוגדר לפי $\varphi(x) = x$ הוא מונומורפיזם של חוגים. מה לגבי $\phi: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ המוגדר לפי $\phi(x) = x$? זה מונומורפיזם של חוגים בלי יחידה.
 Monomorphism Embedding

הגדרה 2.6. הומומורפיזם חח"ע ועל נקרא איזומורפיזם. נאמר שחוגים R, S שיש ביניהם איזומורפיזם $\varphi: R \rightarrow S$ הם איזומורפיים ונסמן $R \cong S$.
 Isomorphism Isomorphic

דוגמה 2.7. העתקת הזהות היא תמיד איזומורפיזם. אבל יש עוד, למשל $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ המוגדרת לפי $\varphi(z) = \bar{z}$ היא איזומורפיזם של חוגים.

הגדרה 2.8. יהי $\varphi: R \rightarrow S$ הומומורפיזם של חוגים. כמו בקורסים אלגברה לינארית ותורת החבורות אי אפשר להתחמק מההגדרות הבאות:

1. התמונה של φ היא $\text{Im } \varphi = \{\varphi(x) \mid x \in R\}$, והיא תת-חוג של S .
 Image

2. הגרעין של φ הוא $\text{Ker } \varphi = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0\}$, והוא תת-חוג בלי יחידה של R . שימו לב שאם $\varphi \neq 0$, אז $1_R \notin \text{Ker } \varphi$.
 Kernel

Endomorphism Automorphism 3. אם $R = S$, נקרא ל- φ אנדומורפיזם. אם בנוסף φ הוא איזומורפיזם, אז הוא נקרא אוטומורפיזם.

הגדרה 2.9. יהי R חוג, $I \subseteq R$ תת-חבורה חיבורית.

Left ideal 1. נאמר כי I הוא אידיאל שמאלי של R אם I לכל $r \in R$ ו- $i \in I$ מתקיים $r \cdot i \in I$. נסמן זאת $I \leq_l R$ ולפעמים $I \leq R$.

Right ideal 2. נאמר כי I הוא אידיאל ימני של R אם I לכל $r \in R$ ו- $i \in I$ מתקיים $i \cdot r \in I$. נסמן זאת $I \leq_r R$.

(Two-sided) Ideal 3. נאמר כי I הוא אידיאל (זו-צדדי) של R אם I לכל $r \in R$ ו- $i \in I$ מתקיים $r \cdot i, i \cdot r \in I$. נסמן זאת $I \triangleleft R$.

דוגמה 2.10. בחוג חילופי ההגדרות השונות של אידיאל מתלכדות.

Proper ideal **דוגמה 2.11.** הקבוצה $\{0\}$ היא אידיאל של R הנקרא האידיאל הטריוויאלי. לפי הגדרה גם R הוא אידיאל, אבל בדרך כלל דורשים הכלה ממש $I \subset R$, ואז קוראים ל- I אידיאל נאות (או אמיתי). ברוב הקורס נתייחס רק לאידיאלים נאותים.

2.12. יהי $\varphi: R \rightarrow S$ הומומורפיזם. אז $\text{Ker } \varphi \triangleleft R$. למעשה גם כל אידיאל הוא גרעין של הומומורפיזם כלשהו.

דוגמה 2.13. האידיאלים היחידים של \mathbb{Z} הם $n\mathbb{Z}$.

תרגיל 2.14. יהי R חוג חילופי, ויהי $A \subset M_n(R)$ חוג המטריצות המשולשיות העליונות. הוכיחו כי אוסף המטריצות המשולשיות העליונות עם אפסים באלכסון הוא אידיאל של A .

תרגיל 2.15. יהי R חוג, ויהי $I \triangleleft R$ אידיאל. הוכיחו שאם $1 \in I$, אז $I = R$. פתרו. לפי הגדרה, לכל $r \in R$, $i \in I$ מתקיים $r \cdot i \in I$. בפרט $r \cdot 1 = r \in I$. לכן $I = R$.

מסקנה 2.16. אידיאל נאות אף פעם לא מכיל את איבר היחידה של החוג. אף יותר, אידיאל נאות לא מכיל איברים הפיכים כלל.

מסקנה 2.17. בחוג חילוק כל האידיאלים הם טריוויאליים.

תרגיל 2.18. יהיו $a, b \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי $b|a$ אם ורק אם $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$.

תרגיל 2.19. הוכיחו שחיתוך אידיאלים הוא אידיאל.

Ideal generated by x **הגדרה 2.20.** יהי R חוג, ויהי $x \in R$ איבר. האידיאל שנוצר על ידי x הוא

$$\langle x \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x \beta_i \mid \alpha_i, \beta_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\}$$

סימון מקובל אחר הוא RxR . באופן דומה לאיברים $x_1, \dots, x_k \in R$ מגדירים

$$\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle x_1 \rangle + \dots + \langle x_k \rangle$$

דוגמה 2.21. בחוג $\mathbb{Z}[x]$ מתקיים

$$\langle 2, x \rangle = \{2f(x) + xg(x) \mid f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\} \subsetneq \mathbb{Z}[x]$$

תרגיל 2.22. מצאו חוג R ואיבר $x \in R$ כך ש- $Rx \neq \langle x \rangle$.

Product of ideals

הגדרה 2.23. יהיו I, J אידאלים. נגדיר את מכפלת האידאלים האלו לפי

$$IJ = \left\{ \sum_{k=1}^n i_k j_k \mid i_k \in I, j_k \in J, k \in \mathbb{N} \right\}$$

כאשר הסכומים בקבוצה הם סופיים, אבל n לא מוגבל. ודאו שאתם יודעים להוכיח שזהו אידאל. כתבו את ההגדרה למכפלת אידאלים סופית.

הערה 2.24. לכל זוג אידאלים I, J מתקיים $IJ \subseteq I \cap J$.

Comaximal
ideals

הגדרה 2.25. יהי R חוג, ויהיו $I, J \triangleleft R$. נאמר כי I, J הם קו־מקסימליים אם $I + J = R$.

תרגיל 2.26. הוכיחו כי האידאלים $\langle x-1 \rangle, \langle 2x-1 \rangle$ הם קו־מקסימליים בחוג $\mathbb{Z}[x]$.

3 תרגול שלישי

Principal ideal

הגדרה 3.1. אידאל מהצורה $\langle x \rangle$ נקרא אידאל ראשי. חוג שבו כל אידאל הוא ראשי נקרא חוג ראשי, אבל לא נשתמש בהם יותר מדי. תחום שלמות ראשי נקרא בקיצור תחום ראשי, ובהם נתמקד.

Principal ideal
domain (PID)

תרגיל 3.2. הוכיחו כי $\mathbb{Z}[x]$ אינו ראשי.

טענה 3.3. מנה של חוג ראשי היא ראשית (למה?). הסיקו כי החוג $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא ראשי. ודאו שאתם יודעים מתי $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא תחום ראשי.

Simple

דוגמה 3.4. חוג R יקרא פשוט אם אין לו אידאלים פרט ל- $\{0\}$.

דוגמה 3.5. חוג חילוק הוא פשוט. האם ההפך נכון?

תרגיל 3.6. הוכיחו שאם R חוג פשוט, אז $Z(R)$ שדה.

הערה 3.7. אם D הוא חוג חילוק, אז $M_n(D)$ הוא חוג פשוט כי ל- D אין אידאלים לא טריוויאלים. לכן $Z(M_n(D))$ הוא שדה, והוא איזומורפי ל- $Z(D)$. הראו כי $Z(M_n(D)) = \{d \cdot I_n \mid d \in Z(D)\}$.

תרגיל 3.8. יהי D חוג חילוק שאינו שדה. נסמן $F = Z(D)$. הוכיחו שלכל $d \in D \setminus F$ מתקיים $\langle x-d \rangle = D[x]$.

תרגיל 3.9. תנו דוגמה לחוגים R, S , הומומורפיזם $\varphi: R \rightarrow S$ ואידאל $I \triangleleft R$ כך ש- $\varphi(I)$ אינו אידאל של S .

פתרון. הזכרו שאם φ על, אז $\varphi(I)$ אידאל. אז ניקח $R = \mathbb{Z}$ ואת $S = \mathbb{Q}$ עם השיכון הטבעי $\varphi = \text{id}$. התמונה של \mathbb{Z} תחת φ היא \mathbb{Z} , וזה לא אידאל של \mathbb{Q} , כי האידאלים היחידים שלו הם טריוויאלים.

Quotient ring

הגדרה 3.10. יהי R חוג, ויהי $I \triangleleft R$ אידאל. חוג המנה הוא הקבוצה

$$R/I = \{a + I \mid a \in R\}$$

עם פעולות החיבור $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ והכפל $(a + I)(b + I) = ab + I$. איבר האפס הוא I ואיבר היחידה הוא $1_R + I$.

הערה 3.11. המחלקות $a + I$ ו- $-a + I$ הן אותו איבר בחוג המנה R/I .

דוגמה 3.12. יהי p ראשוני, אז

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{p\mathbb{Z}, 1 + p\mathbb{Z}, \dots, (p-1) + p\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{F}_p$$

Nilpotent

הגדרה 3.13. איבר $x \in R$ הוא נילפוטנטי אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $x^n = 0$.

תרגיל 3.14. יהי R חוג חילופי ויהי N אוסף האיברים הנילפוטנטיים ב- R .

1. הוכיחו כי $N \triangleleft R$.

2. הוכיחו כי ב- R/N אין איברים נילפוטנטיים לא טריוויאליים (כלומר שונים מ-0).

3. תנו דוגמה לחוג לא חילופי שבו N אינו אידאל.

First isomorphism theorem

משפט 3.15 (משפט האיזומורפיזם הראשון). יהי $f: R \rightarrow S$ הומומורפיזם, אז

$$R/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$$

בפרט אם $\varphi: R \rightarrow S$ אפימורפיזם, אז $R/\text{Ker } \varphi \cong S$.

דוגמה 3.16. יהי $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ הומומורפיזם המוגדר לפי $f(a) = a \pmod{n}$. אז $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

מעתה נשתמש בסימון $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (או $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) ונפסיק להשתמש בסימון \mathbb{Z}_n עבור החוג הזה, כדי לא להתבלבל עם הסימון לחוג המספרים ה- p -אדיים שנפגוש בעתיד.

Subring generated by X

הגדרה 3.17. יהי R חוג, $R_0 \subseteq R$ תת-חוג ו- $X \subseteq R$ תת-קבוצה. תת-החוג הנוצר (פעל R_0) על ידי X הוא חיתוך כל תת-החוגים $S \subseteq R$ המכילים את R_0 ואת X . נסמן תת-חוג זה בסימון $R_0[X]$. אם $R_0[X] = R$, אז נאמר כי R נוצר על ידי X .

אם $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ סופית, אז נסמן $R_0[X] = R_0[a_1, \dots, a_n]$. אם קיימת קבוצה סופית X כך ש- $R_0[X] = R$, נאמר כי R נוצר סופית מעל R_0 .

Finitely generated

הערה 3.18. אם $a \in Z(R)$, אז $R_0[a]$ הוא אוסף הפולינומים ב- a עם מקדמים מ- R_0 .

תרגיל 3.19. כל חוג חילופי שנוצר סופית מעל R_0 הוא מנה (ליתר דיוק, איזומורפי למנה, אבל אנחנו לא נדקדק) של חוג הפולינומים $R_0[x_1, \dots, x_n]$ עבור n כלשהו.

נביא כמה דוגמאות לשימושים במשפט האיזומורפיזם הראשון להבנת חוגי פולינומים. יהי R חוג חילופי.

דוגמה 3.20. יהי $a \in R$ (התוצאה תהיה נכונה כאשר R לא חילופי, אם $a \in Z(R)$), ונביט בהעתקת ההצבה $\varphi_a: R[x] \rightarrow R$ המוגדרת לפי $\varphi_a(f(x)) = f(a)$. הוכיחו שמדובר באפימורפיזם.

Evaluation map

הגרעין של φ_a הוא כל הפולינומים ש- a הוא שורש שלהם. בפרט, עבור $a = 0$ נקבל $\text{Ker } \varphi_0 = \langle x \rangle$, שכן מדובר בכל הפולינומים שהמקדם החופשי שלהם הוא 0. לכן $R[x]/\langle x \rangle \cong R$. הראו שבאופן דומה גם $R[x, y]/\langle y \rangle \cong R[x]$.

תרגיל 3.21. הראו כי $\text{Ker } \varphi_a = \langle x - a \rangle$.

4 תרגול רביעי

תרגיל 4.1. יהיו $I \subseteq J$ אידאלים של R . הוכיחו שקיים אפימורפיזם $R/I \rightarrow R/J$.

Third isomorphism theorem

משפט 4.2 (משפט האיזומורפיזם השלישי). יהיו $I \subseteq J$ אידאלים של חוג R . אז

$$R/I/J/I \cong R/J$$

Maximal ideal

הגדרה 4.3. אידאל נאות $I \triangleleft R$ נקרא אידאל מקסימלי אם לא קיים אידאל נאות שמכיל אותו ממש.

דוגמה 4.4. בחוג $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ יש רק אידאל מקסימלי אחד והוא $2 \cdot \mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ (זה קיצור לכתוב $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z} \cdot (2 + 32\mathbb{Z})$). בחוג $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ יש שני אידאלים מקסימליים והם $3 \cdot \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ ו- $5 \cdot \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$.

דוגמה 4.5. לכל מספר ראשוני p , האידאל $p\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ הוא מקסימלי. האם יש עוד?

משפט 4.6. יהי R חוג. אידאל נאות $I \triangleleft R$ הוא מקסימלי אם ורק אם R/I הוא פשוט. אם בנוסף R חילופי, אז I מקסימלי אם ורק אם R/I שדה.

דוגמה 4.7. האידאל $\langle x, p \rangle \triangleleft \mathbb{Z}[x]$ הוא מקסימלי לכל מספר ראשוני p מפני שחוג המנה $\mathbb{Z}[x]/\langle x, p \rangle \cong \mathbb{F}_p$ הוא שדה. אבל $\langle x \rangle$ לא מקסימלי, כי $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$ אינו שדה (או כי $\langle x \rangle$ מוכל ממש ב- $\langle x, p \rangle$).

Correspondence theorem

משפט 4.8 (משפט ההתאמה). יהי $I \triangleleft R$ אידאל. אז ההתאמה $A \mapsto A/I$ היא איזומורפיזם של סריגים בין האידאלים של R המכילים את I לבין האידאלים של R/I . ההתאמה שופרת הכלה, חיבור, כפל, חיתוך ופנות.

4.1 אידאלים ראשוניים

Prime

4.9 הגדרה. אידאל נאות $I \triangleleft R$ יקרא ראשוני אם לכל $A, B \triangleleft R$ המקיימים $AB \subseteq I$, אז $A \subseteq I$ או $B \subseteq I$.

4.10 תרגיל. יהי $C(\mathbb{R})$ חוג הפונקציות הממשיות הרציפות (עם חיבור וכפל נקודתיים). הוכיחו כי

$$I = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$$

הוא אידאל ראשוני.

4.11 משפט. יהי R חוג חילופי. אז R הוא תחום שלמות אם ורק אם $\{0\}$ הוא אידאל ראשוני.

4.12 מסקנה. יהי R חוג. אז $I \triangleleft R$ ראשוני אם ורק אם $\{0\}$ הוא ראשוני בחוג הפנה R/I .

4.13 תרגיל. יהי R חוג חילופי שבו כל האידאלים הם ראשוניים. הוכיחו כי R שדה.

4.14 תרגיל. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שאם לכל $x \in R$ קיים $n > 1$ כך ש- $x^n = x$, אז כל אידאל ראשוני הוא מקסימלי.

5 תרגול חמישי

5.1 חוגים ראשוניים

Prime ring

5.1 הגדרה. חוג R נקרא ראשוני אם לכל שני אידאלים $A, B \triangleleft R$ המקיימים $AB = 0$, אז $A = 0$ או $B = 0$.

באופן שקול, חוג הוא ראשוני אם המכפלה של כל שני אידאלים השונים מאפס, שונה מאפס.

5.2 משפט. חוג חילופי הוא ראשוני אם ורק אם הוא תחום שלמות.

5.3 תרגיל. יהי R חוג ראשוני. הראו שהמרכז $Z(R)$ הוא תחום שלמות.

5.4 תרגיל. ראינו כבר שתת-חוג של שדה הוא תחום שלמות. הפריכו את המקרה הלא חילופי: מצאו תת-חוג של חוג פשוט שאינו ראשוני.

5.2 מיקום מרכזי

5.5 הגדרה. יהי R חוג ותהי $S \subseteq R$ תת-קבוצה המקיימת:

1. כל איברי S הם רגולריים (כלומר לא מחלקי אפס).

2. S סגורה לכפל.

$$S \subseteq Z(R) \quad .3$$

$$1 \in S \quad .4$$

במילים: S היא תת-מונואיד כפלי מרכזי של איברים רגולריים. נסמן ב- $S^{-1}R$ את קבוצת מחלקות השקילות של $S \times R$ תחת היחס

$$(s, r) \sim (s', r') \Leftrightarrow rs' = sr'$$

ונסמן את המחלקה של (s, r) -ב- $\frac{r}{s}$. הקבוצה $S^{-1}R$, יחד עם פעולות הכפל והחיבור "שמגיעות" כשברים מ- R , הוא חוג הנקרא המיקוס של R -ב- S .

Localization

הערה 5.6. יש מונומורפיזם טבעי $\iota: R \rightarrow S^{-1}R$ לפי $\iota(r) = \frac{r}{1}$. הוא שולח את איברי S לאיברים הפיכים. התכונה האוניברסלית של מיקוס היא שאם $f: R \rightarrow T$ הוא הומומורפיזם של חוגים כך ש- $f(S) \subseteq T^\times$, אז קיים הומומורפיזם יחיד $g: S^{-1}R \rightarrow T$ כך ש- $f = g \circ \iota$.

Local ring

הגדרה 5.7. יהי R חוג חילופי. נאמר שהוא חוג מקומי אם יש לו אידאל מקסימלי יחיד.

דוגמה 5.8. יהי $p \in \mathbb{Z}$ ראשוני. אז $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ סגורה לכפל והחוג $\mathbb{Z}_{(p)} = S^{-1}\mathbb{Z}$ הוא חוג מקומי. האידאל המקסימלי היחיד שלו הוא $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$. כדי לראות ש- \mathfrak{m} מקסימלי, אפשר להוכיח $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ וזה שדה (האיזומורפיזם לא לגמרי טריוויאלי). כאשר R הוא תחום שלמות, אז אפשר לחשוב על מיקוס שלו $S^{-1}R$ כמשוכן בשדה השברים של R (ראו הגדרה 5.9). לכן יותר קל לחשוב על החוג בתור הקבוצה

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$$

$$\mathfrak{m} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \mid a, p \nmid b \right\}$$

קל לראות ש- \mathfrak{m} הוא האידאל המקסימלי היחיד, שכן כל האיברים ב- $\mathbb{Z}_{(p)} \setminus \mathfrak{m}$ הם הפיכים.

הגדרה 5.9. יהי R תחום שלמות. עבור $S = R \setminus \{0\}$ המיקוס $S^{-1}R$ הינו שדה, הנקרא שדה השברים של R .

Fraction field, or field of quotients

דוגמה 5.10. \mathbb{Q} הוא שדה השברים של \mathbb{Z} .

משפט 5.11. נסתכל על התאמות בין שתי קבוצות של אידאלים

$$\{J \triangleleft S^{-1}R\} \quad \{I \triangleleft R \mid I \cap S = \emptyset\}$$

$$S^{-1}I \leftrightarrow I$$

$$J \mapsto J \cap R$$

1. ההתאמה $S^{-1}I \leftrightarrow I$ היא על.

2. ההתאמה $J \mapsto J \cap R$ היא חח"ע.

3. הטענות האלו נכונות גם כאשר נגביל את הקבוצות רק לאידאלים ראשוניים.

הערה 5.12. יתכן מצב שבו $I_0 \in \{I \triangleleft R \mid I \cap S = \emptyset\}$ אינו ראשוני, אבל $S^{-1}I_0$ כן ראשוני ב- $S^{-1}R$. למשל, $6\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ אינו ראשוני, וכאשר נבחר את $S = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, אז $S^{-1}(6\mathbb{Z}) = S^{-1}(3\mathbb{Z})$ הוא ראשוני ב- $S^{-1}\mathbb{Z}$.

6 תרגול שישי

משפט 6.1 (מההרצאה). יהי R חוג חילופי. התנאים הבאים שקולים:

1. R הוא חוג מקומי.

2. אוסף האיברים הלא הפיכים הוא אידאל.

3. לכל $a, b \in R$, אם $a + b = 1$, אז a הפיך או b הפיך.

מסקנה 6.2. בחוג מקומי R לכל $x \in R$ מתקיים ש- x הפיך או $1 - x$ הפיך.

מסקנה 6.3. בחוג מקומי אין אידמפוטנטים לא טריוויאלים.

הוכחה. נניח בשלילה $e \in R$, $e \neq 0$ אידמפוטנט. אז $e = e^2$, לכן $e(1 - e) = 0$, ונקבל שגם e וגם $1 - e$ לא הפיכים (כי הם מחלקי אפס). זו סתירה למסקנה הקודמת. \square

תרגיל 6.4. יהי \mathfrak{m} אידאל מקסימלי בחוג R . הוכיחו שעבור $n \in \mathbb{N}$ החוג R/\mathfrak{m}^n הוא חוג מקומי עם אידאל מקסימלי $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$.

תרגיל 6.5 (לבית). מצאו את האיברים ההפיכים ב- $F[x]/\langle x^n \rangle$.

6.1 חוגי טורים פורמליים

Formal Laurent series

Formal power series

הגדרה 6.6. יהי R תחום. חוג טורי לורן הפורמליים $R((x))$ כולל את כל הסכומים האינסופיים הפורמליים $\sum_{i=-n}^{\infty} a_i x^i$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו ו- $a_i \in R$. הפעולות הן החיבור והכפל המוכללות מחוג הפולינומים. לחוג זה יש תת-חוג של טורי חזקות פורמליים $R[[x]]$ הכולל סכומים $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. כקבוצה, טורי חזקות פורמליים הם $R^{\mathbb{N}}$, אבל כחוג פעולת הכפל היא לא רכיב-רכיב!

דוגמה 6.7. בחוג $R[[x]]$ האיבר $1 - x$ הוא הפיך (השוו למצב ב- $R[x]$), אבל x אינו הפיך. לכן $R[[x]]$ אינו שדה.

6.2 חוגי פולינומים מעל תחומי שלמות

עבור הפרק הזה יהי R הוא תחום שלמות, ויהיו $a, b \in R$ איברים.

Divides

הגדרה 6.8. נאמר ש- a מחלק את b , ונסמן $a|b$, אם קיים $k \in R$ כך ש- $ak = b$.

דוגמה 6.9. ב- \mathbb{Z} מתקיים $2|4$, אבל $3 \nmid 4$. לעומת זאת $3|4$ ב- \mathbb{Q} .

Equivalent up to multiplication by a unit

הגדרה 6.10. יהיו $a, b \in R$. אם $a|b$ וגם $b|a$, נאמר כי a ו- b חברים ונסמן זאת $a \sim b$. ודאו שאתם יודעים להוכיח שיחס החברות הוא יחס שקילות.

כמה תכונות של יחס זה:

1. מתקיים $a \sim b$ אם ורק אם $Ra = Rb$.

2. נניח $a, b \in R \setminus \{0\}$. אז $a \sim b$ אם ורק אם קיים $u \in R^\times$ כך ש- $a = bu$.
למה? שהרי $ak = b$ וגם $bm = a$, נציב ונקבל $bmk = b$. אז $b(1 - mk) = 0$.
וכיוון ש- R תחום שלמות ו- $b \neq 0$, אז $mk = 1$. כעת אפשר לבחור $u = m \in R^\times$.

3. בפרט, $a \sim 1$ אם ורק אם a הפיך אם ורק אם $Ra = R$.

תרגיל 6.11. מצאו את ההפיכים בחוגים $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[x]$.

Ring of integers

הגדרה 6.12. יהי $D \in \mathbb{Z}$ חופשי מריבועים. עבור השדה $\mathbb{Q}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ נגדיר את חוג השלמים שלו להיות

$$\mathcal{O}_D = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{D}], & D \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right], & D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

Norm

הגדרה 6.13. יהי $D \in \mathbb{Z}$ חופשי מריבועים. נגדיר לכל איבר $\alpha = a + b\sqrt{D}$ את הנורמה לפי $N: \mathcal{O}_D \rightarrow \mathbb{Z}$

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + b\sqrt{D})(a - b\sqrt{D})$$

שימו לב שהאינוולוציה $\bar{\alpha}$ היא לא בהכרח הצמוד המרוכב. כמה מן התכונות השימושיות של נורמה: $N(xy) = N(x)N(y)$, $N(x) = 0$ אם ורק אם $x = 0$.

Pell's equation

הערה 6.14. משוואת פל היא כל משוואה דיופנטית מן הצורה

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

כאשר D שלם לא ריבועי. לגראנז' הוכיח שכאשר D טבעי ואינו ריבוע, למשוואה יש אינסוף פתרונות שלמים. מה הקשר לנורמה בחוגי שלמים ריבועיים? מה הקשר לפיתוח \sqrt{D} כשבר משולב?

בעיה 6.15 (משפט דיריכלה לשדות ריבועיים עם דיסקרימיננטה חיובית). יהי $D > 0$ חופשי מריבועים. אז קיים $\alpha_0 \in \mathcal{O}_D$ כך שכל איבר הפיך הוא מן הצורה $\pm \alpha_0^n$ עבור $n \in \mathbb{Z}$. הדרכה להוכחה:

1. יהיו $\alpha = a + b\sqrt{D}$, $\alpha' = a' + b'\sqrt{D}$ פתרונות למשוואת פל. הוכיחו שגם

$$\alpha\alpha' = (aa' + Dbb') + (ab' + a'b)\sqrt{D}$$

הוא פתרון למשוואת פל. הסיקו שאוסף הפתרונות למשוואת פל הוא תת-חבורה של \mathcal{O}_D^\times .

2. נאמר כי $\alpha > 0$ אם $a > 0$ וגם $b > 0$. הראו שאם $\alpha, \alpha' > 0$, אז גם $\alpha\alpha', \alpha + \alpha' > 0$.

3. הניחו כי $\alpha, \alpha' > 0$ הפיכים. נאמר כי $\alpha > \alpha'$ אם $\alpha - \alpha' > 0$. הוכיחו ש- $a > a'$ אם ורק אם $b > b'$ אם ורק אם $\alpha > \alpha'$.

4. הניחו $\alpha > \alpha' > 0$ פתרונות למשוואת פל. הוכיחו כי $\alpha' > \alpha'^{-1} > 0$.

5. הוכיחו שקיים $\alpha_0 \in \mathcal{O}_D$ כך שכל פתרון למשוואת פל הוא מן הצורה α_0^n עבור $n \in \mathbb{Z}$. רמז: בחרו $\alpha_0 > 0$ מינימלי, והניחו בדרך השלילה שקיים פתרון $\beta > 0$ שאינו חזקה של α_0 .

6. סיימו את הוכחת משפט דיריכלה לשדות ריבועיים עם דיסקרימיננטה חיובית.

תרגיל 6.16. עבור $D = -3$ מצאו את ההפיכים ב- \mathcal{O}_{-3} .

6.17. טענה 6.17. מפני שאנו עוסקים בתחומי שלמות, אז עבור $a \neq 0$ מתקיים $a|b$ אם ורק אם $ba^{-1} \in R$. המכפלה האחרונה מחושבת בשדה השברים של R (שקיים!) ולא מדקדקים בכך שאנו עובדים עם השיכון לשדה השברים.

7 תרגול שביעי

הגדרה 7.1. תמיד אפשר לפרק איבר $a \in R$, $a \neq 0$ בתחום שלמות כ- $a = au \cdot u^{-1}$ כאשר $u \in R^\times$ איבר הפיך. לפירוק כזה נקרא פירוק טריוויאלי. נאמר שאיבר $a \in R$, $a \neq 0$ לא הפיך הוא אי פריק אם אין לו פירוק לא טריוויאלי.

Irreducible

7.2. טענה 7.2. התנאים הבאים שקולים:

1. a אי פריק.

2. אם $a = xy$, אז $a \sim x$ או $a \sim y$.

3. אם $a = xy$, אז x הפיך או y הפיך.

4. אם $a = xy$, אז $a \sim x$ או $a \sim y$ הפיך.

5. אם $x|a$, אז $a \sim x$ או $a \sim y$ הפיך.

דוגמה 7.3. חשוב לדעת באיזה חוג נמצאים: האיבר $x^2 + 1$ הוא אי פריק ב- $\mathbb{R}[x]$, אבל פריק ב- $\mathbb{C}[x]$.

תרגיל 7.4. יהי $p \in R$ אי פריק, ויהי $q \sim p$. הוכיחו ש- q אי פריק.

תרגיל 7.5. הוכיחו שאם $x|y$ ב- \mathcal{O}_D , אז $N(x)|N(y)$ ב- \mathbb{Z} . הסיקו ש- x הפיך ב- \mathcal{O}_D אם ורק אם $N(x) = \pm 1$.

תרגיל 7.6. יהי $a \in \mathcal{O}_D$. הוכיחו שאם $N(a)$ אי פריק, אז a אי פריק.

תרגיל 7.7. הוכיחו ש- $\mathcal{O}_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ אינו פריק.

פתרון. נניח $a = xy$. אזי $6 = N(a) = N(x)N(y)$. נניח בשלילה ש- x, y לא הפיכים. כלומר

$$N(x) = 2, N(y) = 3 \quad \vee \quad N(x) = 3, N(y) = 2$$

מפני שהנורמה ב- \mathcal{O}_{-5} אינה שלילית, הרי $N(c + d\sqrt{-5}) = c^2 + 5d^2$. אבל למשוואות $c^2 + 5d^2 = 2, 3$ אין פתרון בשלמים (ניתן לחשב מודולו 5 ולראות ששם הריבועים הם רק 1 ו-4). סתירה.

תרגיל 7.8. הוכיחו כי $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ אינו חוג ראשי. כלומר שקיים אידאל שלא נוצר על ידי איבר אחד.

הגדרה 7.9. איבר $0 \neq p \in R$ יקרא ראשוני אם p לא הפיך ואם $p|ab$ גורר ש- $p|a$ או $p|b$ לכל $a, b \in R$.

תרגיל 7.10. כל איבר ראשוני הוא אי פריק.

תרגיל 7.11. הראו כי $1 + i \in \mathbb{Z}[i]$ הוא ראשוני.

הערה 7.12. כמו בשאר ההגדרות, ראשוניות איבר תלויה בחוג. למשל $2 \in \mathbb{Z}$ ראשוני, ואילו $2 \in \mathbb{Z}[i]$ פריק, ולכן גם לא ראשוני.

דוגמה 7.13. ישנם איברים אי פריקים שאינם ראשוניים. למשל ראינו כי $3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ אי פריק, ונראה שהוא לא ראשוני. נשים לב כי

$$3|6 = (4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$$

אבל 3 לא מחלק את $4 \pm \sqrt{10}$ משיקולי נורמה. כלומר אם $3\alpha = (4 \pm \sqrt{10})$ עבור $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, אז

$$6 = N(4 \pm \sqrt{10}) = N(3)N(\alpha) = 9N(\alpha)$$

ונקבל $N(\alpha) = \frac{6}{9} \in \mathbb{Z}$ שזו סתירה.

תרגיל 7.14. הוכיחו כי $x^2 + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ הוא איבר ראשוני.

פתרון. נוכיח כי $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2+2 \rangle \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ בעזרת הומומורפיזם ההצבה $\varphi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ השולח את $f(x)$ ל- $f(\sqrt{-2})$. הגרעין הוא בדיוק $\langle x^2 + 2 \rangle$ ונקבל את האיזומורפיזם הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון. מפני שהנורמה ב- $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ מתאפסת רק עבור 0, אז מדובר בתחום שלמות. לכן האידיאל $\langle x^2 + 2 \rangle$ הוא ראשוני, ולכן $x^2 + 2$ ראשוני.

8 תרגול שמיני

הגדרה 8.1. תחום שלמות R נקרא אטומי אם לכל $0 \neq a \in R$ קיים פירוק לגורמים אי פריקים.

דוגמה 8.2. הנה רשימה של כמה תחומים אטומיים: \mathbb{Z} , כל שדה F (באופן ריק), כל חוג שלמים ריבועיים \mathcal{O}_D , ו- $F[x]$ ו- $\mathbb{Z}[x]$.

הגדרה 8.3. חוג אטומי R יקרא תחום פריקות יחידה (תפ"י) אם בכל שני פירוקים של אותו איבר

$$a = up_1 \dots p_r = vq_1 \dots q_s$$

Unique factorization domain (UFD)

האורכים מקיימים $r = s$, וקיימת תמורה σ של הגורמים האי פריקים כך ש- $p_i \sim q_{\sigma(i)}$.

דוגמה 8.4. החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ אינו תחום פריקות יחידה, שכן $(4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10}) = 6 = 2 \cdot 3$. ראינו כי האיברים בפירוקים הם אי פריקים. נשאר להוכיח שהאיברים מפירוקים שונים לא חברים. זה קל להוכיח מחישוב הנורמות.

משפט 8.5. כל תחום ראשי הוא תחום פריקות יחידה.

מסקנה 8.6. החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ אינו ראשי.

משפט 8.7. יהי R תחום ראשי. אז $p \in R$ אי פריק אם ורק אם הוא ראשוני.

תרגיל 8.8. יהי p מספר ראשוני אי זוגי, ויהי $D \in \mathbb{Z}$ כך ש- $D \not\equiv 1 \pmod{p}$. הוכיחו שאם למשוואה

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

יש פתרון, אז בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ מתקיים $\langle p \rangle = P_1 P_2$ עבור אידאלים נאותים $P_1 \neq P_2$.

הגדרה 8.9. יהי R תחום שלמות. פונקציה $d : R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0, -\infty\}$ המקיימת $d(0) < d(x)$ לכל $x \neq 0$ נקראת פונקציה אוקלידית אם

Euclidean function

1. לכל $b \neq 0$ ולכל a קיימים $q, r \in R$ כך ש- $a = qb + r$ וגם $d(r) < d(b)$.

2. $d(a) \leq d(b)$ לכל $a|b$.

Euclidean domain

אם קיימת פונקציה כזו עבור R , נאמר שהוא תחום אוקלידי.

דוגמה 8.10. כל שדה הוא תחום אוקלידי, באופן טריוויאלי. פשוט נגדיר $d(x) = 1$ לכל $x \neq 0$. החוג $\mathcal{O}_{-1} = \mathbb{Z}[i]$ הוא אוקלידי, עם פונקציית הנורמה $d(a + bi) = a^2 + b^2$. אגב, ישנם בדיוק 21 חוגי שלמים ריבועיים \mathcal{O}_D שפונקציית הנורמה שלהם היא אוקלידית.

תרגיל 8.11. הראו שהחוג $\mathbb{Z}[x]$ אינו תחום אוקלידי.

תרגיל 8.12. יהי F שדה. הוכיחו ש- $F[[x]]$ תחום אוקלידי.

תרגיל 8.13. יהי $a \in R$ איבר בתחום אוקלידי. הוכיחו ש- a הפיך אם ורק אם $d(a) = d(1)$.

פתרו. אם a הפיך, אז $a|1$ ולכן $d(a) \leq d(1)$, וגם $1|a$ ולכן $d(1) \leq d(a)$. בסך הכל $d(a) = d(1)$.

אם $d(a) = d(1)$, אז נוכל לרשום $1 = qa + r$ עבור $d(r) < d(a) = d(1)$. אם $r \neq 0$ נקבל סתירה (כי $d(1) \leq d(r)$), לכן $a \sim 1$, ולכן a הפיך.

9 תרגול תשיעי

9.1 אי פריקות של פולינומים

משפט 9.1. יהי F שדה, ויהי $f(x) \in F[x]$ פולינום ממעלה $n \geq 1$. אז ל- f יש לכל היותר n שורשים שונים ב- F .

הערה 9.2. המשפט לעיל אינו נכון כאשר F אינו שדה. למשל לפולינום $x^2 + x$ יש ארבעה פתרונות בחוג $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

משפט 9.3. יהי R חוג חילופי, ויהיו $c \in R$ ו- $f(x) \in R[x]$. אז $f(c) = 0$ אם ורק אם $(x - c) | f(x)$ ב- $R[x]$.

משפט 9.4. יהי F שדה, ויהי $f(x) \in F[x]$ פולינום ממעלה 2 או 3. אז $f(x)$ אי פריק אם ורק אם אין לו שורשים ב- F .

תרגיל 9.5. יהי פולינום

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

ונניח שישנו שבר מצומצם $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ שהוא שורש של f . הוכיחו ש- $d|a_n$ ו- $c|a_0$.

תרגיל 9.6. יהי p מספר ראשוני. הראו שלכל $n > 1$ טבעי המספר $\sqrt[n]{p}$ הוא אי רציונלי.

לשאר התרגול נניח כי R הוא תחום פריקות יחידה, ו- F הוא שדה השברים שלו, אלא אם נאמר אחרת.

האינטואיציה הראשונית היא לחשוב שבשדה השברים יותר דברים מתפרקים, בדומה לכך ש- $x^2 + 1$ אי פריק מעל \mathbb{R} אבל פריק מעל \mathbb{C} . מסתבר שזה לא ממש כך:

דוגמה 9.7. הפולינום $2x + 2$ פריק מעל \mathbb{Z} : $2x + 2 = 2(x + 1)$ וזה פירוק אמיתי. אבל מעל \mathbb{Q} הפירוק הזה לא אמיתי (כי 2 הפיך) והפולינום אי פריק. אבל הפירוק הזה מעל \mathbb{Z} , הוא לא באמת "הוגן" ולכן אנחנו קוראים לפירוק של פולינום כשאתה הגורמים הוא סקלר פירוק לא אמיתי. פירוק אמיתי של פולינומים הוא פירוק לפולינומים מדרגות נמוכות יותר.

Content

הגדרה 9.8. יהי $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ פולינום. התכולה של f היא המחלק המשותף המירבי של המקדמים a_0, a_1, \dots, a_n ומסמנים אותה ב- $c(f)$.

Primitive

הגדרה 9.9. פולינום $f \in R[x]$ יקרא פרימיטיבי אם מקדמיו זרים, כלומר $c(f) = 1$.

Eisenstein's criterion

משפט 9.10 (קריטריון אייזנשטיין). יהי $P \triangleleft R$ אידאל ראשוני. יהי $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ פולינום המקיים

$$\bullet a_i \in P \text{ לכל } i \neq n$$

$$\bullet a_n \notin P$$

$$\bullet a_0 \notin P^2$$

אז f אי פריק ב- $F[x]$ (אין לו פירוק אמיתי מעל R). אם f פרימיטיבי ב- R , אז f אי פריק ב- $R[x]$.

במקרה הפרטי שבו $P = \langle p \rangle$ עבור איבר ראשוני p התנאים לעיל שקולים לכך ש- p לא מחלק את a_n , מחלק את a_i עבור $i \neq n$ ו- p^2 לא מחלק את a_0 .

דוגמה 9.11. הפולינום $f(x) = 22x^5 + 27x + 15$ הוא אי פריק מעל \mathbb{Z} כי הוא מקיים את קריטריון אייזנשטיין עבור $p = 3$. כלומר 3 לא מחלק את 22, מחלק את 27 ואת 15, אבל 3^2 לא מחלק את 15.

תרגיל 9.12. הוכיחו האם $f(x) = x^2 - 3$ אי פריק ב- $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}][x]$.

טענה 9.13. יהיו $a, b \in F$, ונניח $a \neq 0$. אז $f(x) \in F[x]$ אי פריק אם ורק אם $f(ax + b)$ אי פריק.

דוגמה 9.14. כדי להוכיח ש- $f(x) = 8x^3 + 6x^2 + 1$ אי פריק מעל \mathbb{Q} נציב $x \mapsto x + 1$ ונקבל

$$f(x + 1) = 8x^3 + 30x^2 + 36x + 15$$

שמקיים את קריטריון אייזנשטיין עבור $p = 3$. לכן $f(x + 1)$ אי פריק, ולכן $f(x)$ אי פריק מעל \mathbb{Q} .

תרגיל 9.15. הוכיחו כי $x^n - y \in F[[y]][x]$ הוא אי פריק.

משפט 9.16 (אחת הגרסאות של הלמה של גאוס). יהי $f(x) \in R[x]$ פרימיטיבי. אז $f(x)$ אי פריק מעל R אם ורק אם f אי פריק מעל F .

מסקנה 9.17. תחת אותם תנאים, נניח $g(x) \in R[x]$. אז $g|f$ ב- $R[x]$ אם ורק אם $g|f$ ב- $F[x]$.

כלומר בעיות פירוק וחלוקה של פולינומים מעל \mathbb{Q} "שקולות" לבעיות פירוק וחלוקה של פולינומים מעל \mathbb{Z} .

10 תרגול עשירי

10.1 מבוא למודולים

Left module

הגדרה 10.1. מודול שמאלי מעל חוג R הוא חבורה חיבורית אבלית $(M, +)$ עם פעולה $\mu: R \times M \rightarrow M$, נסמן $\mu(r, a) = ra$ ונדרוש שיתקיים לכל $r, s \in R$ ולכל $a, b \in M$:

$$1. \quad r(a + b) = ra + rb$$

$$2. \quad (r + s)a = ra + sa$$

$$3. \quad r(sa) = (rs)a$$

$$4. \quad 1 \cdot a = a$$

הערה 10.2. לכל $a \in M$ מתקיים $0_R \cdot a = 0_M$, ולכל $r \in R$ מתקיים $r \cdot 0_M = 0_M$.

דוגמה 10.3. כל מרחב וקטורי מעל שדה הוא מודול (מעל השדה).

דוגמה 10.4. כל חבורה אבלית היא מודול מעל \mathbb{Z} .

Submodule

הגדרה 10.5. יהי M מודול מעל R . תת-חבורה $N < M$ תקרא תת-מודול של M אם לכל $r \in R$ ו- $n \in N$ מתקיים $rn \in N$.

דוגמה 10.6. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית. אפשר להעניק ל- V מבנה של מודול מעל $F[x]$ על ידי הגדרת הכפל $f(x) \cdot v = f(T)(v)$.

כמו למבנים אלגבריים אחרים, גם למודולים ישנן הגדרות למנות, הומומורפיזם ומשפטי איזומורפיזמים.

הגדרה 10.7. יהי M מודול מעל R , ויהי $N \leq M$ תת-מודול. כחבורות, ברור ש- N הוא תת-חבורה נורמלית, ומסתבר שלחבורת המנה M/N יש מבנה של מודול מעל R , הנקרא מודול מנה.

Quotient module

Module

homomorphism

הגדרה 10.8. יהיו M, N מודולים מעל R . פונקציה $f: M \rightarrow N$ היא הומומורפיזם של מודולים מעל R אם f היא הומומורפיזם של חבורות המקיים $f(rm) = r \cdot f(m)$ לכל $r \in R$ ו- $m \in M$.

משפט 10.9. יהי $f: M \rightarrow N$ הומומורפיזם של מודולים. נסמן את הגרעין $\text{Ker}(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$, שהוא תת-מודול של M . אז מתקיימים משפטי האיזומורפיזמים של נתר, ובפרט $M/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.

תרגיל 10.10. יהי R חוג חילופי. יהי n מספר טבעי, ותהי E קבוצת הפונקציות $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow R$. הוכיחו שאפשר לתת ל- E מבנה של מודול מעל R , וכי $R^n \cong E$ כמודולים.

Simple

הגדרה 10.11. מודול M יקרא פשוט אם אין לו תת-מודולים לא טריוויאליים.

Cyclic
submodule

הגדרה 10.12. יהי M מודול מעל R , ויהי $a \in M$. תת-המודול הציקלי הנוצר על ידי a הוא

$$Ra = \{ra \mid r \in R\} \leq M$$

דוגמה 10.13. יתכן כי M/N וגם N מודולים ציקליים, אבל M איננו. למשל, $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ו- $N = \mathbb{Z} \times \{0\}$ (כמודולים מעל \mathbb{Z} לצורך העניין).

משפט 10.14. יהי M מודול מעל R . אז M הוא ציקלי אם ורק אם קיים איזאל שמאלי $R/I \cong M$ כך ש- $I \triangleleft R$.

Spanned by

הגדרה 10.15. נאמר שמודול M נפרש על ידי תת-קבוצה $\{a_j\}_{j \in J} \subseteq M$ מעל R אם לכל $m \in M$ קיימים $r_1, \dots, r_n \in R$ כך ש- $m = \sum_{i=1}^n r_i a_i$ עבור a_1, \dots, a_n כלשהם מהקבוצה.

Finitely
generated

אם ל- M יש קבוצה פורשת סופית, נאמר ש- M הוא מודול נוצר סופית מעל R .

הגדרה 10.16. תהי $\{a_j\}_{j \in J} \subseteq M$ קבוצה פורשת של M . אם הקבוצה בלתי תלויה לינארית, כלומר

$$\sum_{i=1}^n r_i a_i = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$$

Basis
Free

נקרא לקבוצה בסיס. מודול שיש לו בסיס נקרא חופשי.

דוגמה 10.17. המודול R^n הוא חופשי ונוצר סופית מעל R על ידי $\{e_1, \dots, e_n\}$. אתגר: הוכיחו שלמודול חופשי הנוצר סופית, יש בסיס סופי.

Annihilator

הגדרה 10.18. יהי M מודול מעל R . נגדיר את המאפס (השמאלי) של $x \in M$ הוא

$$\text{Ann}_R(x) = \{r \in R \mid rx = 0\}$$

וקל לראות כי $\text{Ann}_R(x) \triangleleft R$. באופן דומה לתת-קבוצה $S \subseteq M$ אפשר להגדיר את המאפס (השמאלי) להיות

$$\text{Ann}_R(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}$$

Torsion

הגדרה 10.19. יהי M מודול מעל R . נאמר שאיבר $x \in M$ הוא מפותל אם קיים $r \in R$ כך ש- $rx = 0$ (אם R אינו תחום שלמות, נאמר ש- x מפותל רק אם קיים r רגולרי כך ש- $rx = 0$).

Torsion

נגדיר את הפיתול של M להיות הקבוצה

$$\text{Tor}_R(M) = \{m \in M \mid \exists (0 \neq r \in R), r \cdot m = 0\}$$

Torsion free

נקרא ל- M מפותל אם כל איבריו מפותלים, כלומר $\text{Tor}_R(M) = M$. נאמר ש- M חסר פיתול אם אין בו איברים מפותלים.

Torsion
submodule

טענה 10.20. יהי R תחום שלמות. אז $\text{Tor}(M)$ הוא תת-מודול של M .
במקרה כזה, ראוי לקרוא ל- $\text{Tor}(M)$ תת-מודול הפיתול של M .
הערה 10.21. כל מודול M מעל תחום שלמות R ניתן להצגה כסכום ישר של מודולים

$$M \cong \text{Tor}(M) \oplus (M/\text{Tor}(M))$$

דוגמה 10.22. יהי $M = \mathbb{Z}^3 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ מודול מעל \mathbb{Z} . אז $\text{Tor}(M) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ו-
 $M/\text{Tor}(M) \cong \mathbb{Z}^3$.

11 תרגול אחת עשר

Faithful

הגדרה 11.1. יהי M מודול מעל R . נאמר כי M הוא נאמן אם $\text{Ann}_R(M) = 0$.

הערה 11.2. כל מודול חסר פיתול הוא נאמן.

תרגיל 11.3. הראו כי M הוא מודול מעל $R/\text{Ann}(M)$.

מסקנה 11.4. אם $I \subseteq \text{Ann}(M)$ הוא אידיאל של R , אז M הוא גם מודול מעל R/I .

דוגמה 11.5. יהי $V = \mathbb{R}^3$ ותהי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה שמשרה ל- V מבנה של מודול מעל $\mathbb{R}[x]$ (תזכורת: $f(x) \cdot v = f(A)v$).
הפולינום האופייני של A הוא

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$$

לפי משפט קיילי המילטון $f(A) = 0$, ולכן לכל $v \in V$ מתקיים $f(x)v = f(A)v = 0 \cdot v = 0$.
לכן $\langle f(x) \rangle \subseteq \text{Ann}(V)$ ומן המסקנה נקבל ש- V הוא גם מודול מעל $\mathbb{R}[x]/\langle f(x) \rangle$.

טענה 11.6. יהיו N, M מודולים איזומורפיים מעל R . אז $\text{Ann}(M) = \text{Ann}(N)$.

11.1 מודולים מעל תחומים ראשיים

בחלק זה נניח כי R הוא תחום ראשי, ונדבר על המבנה של מודולים נוצרים סופית מעליו. התיאוריה אינה זהה לתורת מרחבים וקטוריים ממימד סופי, אבל לא הכל אבוד.

משפט 11.7. כל תת-מודול של R^n הוא חופשי מדרגה הקטנה או שווה n (כלומר יש לו בסיס מגודל לכל היותר n).

משפט 11.8. כל תת-מודול של R^n הוא מן הצורה $A \cdot R^n$ עבור $A \in M_n(R)$.

המשפט האחרון מאפשר לנו למצוא בסיס של תת-מודול של R^n : בהנתן קבוצה פורשת של תת-המודול, למשל עמודות A , אז נוכל לדרג את המטריצה ומשם לקבל את הבסיס.

תרגיל 11.9. מצאו בסיס של תת-המודול של \mathbb{Z}^3 , כמודול מעל \mathbb{Z} , הנפרש על ידי

$$\{(1, 0, -1), (2, -3, 1), (4, -3, -1)\}$$

משפט 11.10. כל מודול נוצר סופית מעל תחום ראשי R הוא מן הצורה $M_A = R^n / AR^n$ עבור $A \in M_n(R)$.

ראינו כיצד מוצאים את המטריצה A (לפעמים נקראת מטריצת היחסים של M_A): ישנו אפימורפיזם $f: R^n \rightarrow M_A$ שבו $\text{Ker } f = AR^n$, כאשר $A = (a_{ij})$ ו- $\sum a_{ij}e_i$ היא קבוצה פורשת של $\text{Ker } f$. לכן בהנתן קבוצת יוצרים סופית של M_A , אם מוצאים יוצרים לגרעין (למשל על ידי דירוג) ומשלימים באפסים, אז מצאנו את A עד כדי כפל בשמאל ומימין במטריצות הפיכות מעל R .

Similar

הגדרה 11.11. תהינה $A, B \in M_n(R)$. נסמן $A \sim B$ ונאמר שהמטריצות זומות אם קיימות $P, Q \in GL_n(R)$ כך ש- $B = PAQ$. (זאת ההגדרה אצלנו, יש כאלו שמגדירים דימיון מטריצות רק עבור $P = Q^{-1}$ שהוא מקרה פרטי של הצמדה.)

הכפל במטריצות הפיכות מעל חוג ראשי הוא למעשה סדרה (סופית) של הפעולות הבאות:

1. הוספת כפולה של עמודה (שורה) לעמודה (לשורה) אחרת.
2. החלפת עמודות והחלפת שורות.
3. כפל בהופכי.

טענה 11.12. מתקיים $A \sim B$ אם ורק אם $M_A \cong M_B$.

דוגמה 11.13. נתבונן בחבורה $M = \{ax + by \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ונחשוב עליה כמודול מעל $\mathbb{Z}[i]$ לפי

$$ix = y, \quad iy = -x$$

בבית, אפשר וכדאי לוודא שזה אכן מודול. יש אפימורפיזם $\varphi: \mathbb{Z}[i]^2 \rightarrow M$ המוגדר לפי $e_1 \mapsto x, e_2 \mapsto y$. הגרעין נוצר על ידי $ie_1 - e_2$ (קל לראות לפי הכלה ומשיקולי דרגה). לכן מטריצת היחסים היא $\begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ומתקיים

$$M \cong \mathbb{Z}[i]^2 / \begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{Z}[i]^2$$

מפני שהמטריצה מוגדרת עד כדי דימיון, נוכל להגיע לצורה אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-iR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $M \cong 0 \oplus \mathbb{Z}[i]$ בתור מודול מעל $\mathbb{Z}[i]$.

תרגיל 11.14. חשבו את הסדר של החבורה האבלית

$$G = \left\langle a, b, c \mid \begin{array}{l} 2a + 4b + 3c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ a + 4b + 9c = 0 \end{array} \right\rangle$$

תרגיל 11.15. יהי $R = \mathbb{Q}[x]$ ונתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 2 & -6 \\ 1 & x & -3 \\ 1 & 1 & x-4 \end{pmatrix}$$

יהי $M = R^3/AR^3$. הוכיחו כי $\langle 1-x^2 \rangle \subseteq \text{Ann}(M)$.