תרגיל בית מס' 7

6 בינואר 2013

1. תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$, $N \leq H \leq G$.

(א) הוכח ש H/N היא תת־חבורה של G/N.

פתרון: N נורמלית ב־G, ולכן לכל $g \in G$ מתקיים $gN = Ng$. בפרט עבור כל $g \in H \subseteq G$ מתקיים $gN = Ng$. לפיכך Nנורמלית ב־H, ו־H/N מוגדרת היטב. אנחנו כבר יודעים ש־H/N היא חבורה. לכן נותר להראות הכלה. איבר ב־H/N הוא מהצורה hN בעבור $h \in H$. לפיכך, $hN \in G/N$, והראנו את ההכלה. ■

(ב) הראה שאם H היא תת־חבורה נורמלית של G , אזי $H/N \trianglelefteq G/N$.

פתרון: נניח H נורמלית ב־G. לכן, לכל $g \in G$ מתקיים $gHg^{-1} = H$. יהי $gN \in G/N$ נתון. אנו רוצים להראות כי $gNH/N\,(gN)^{-1} = H/N$. נפתח את אגף שמאל.

$$\begin{aligned} gNH/N\,(gN)^{-1} &= gNH/Ng^{-1}N = gN\{hN \mid h \in H\}g^{-1}N \\ &= \{gNhNg^{-1}N \mid h \in H\} \end{aligned}$$

מכיוון ש־N נורמלית ב־G, ניתן להעביר את כל האיברים שמאלה, ולהשאיר את N מימין. קיבלנו $= gNH/N\,(gN)^{-1}$ $\{ghg^{-1}N \mid h \in H\}$. לפי הנתון, H נורמלית ב־G, ולכן $ghg^{-1} \in H$. בסך הכל קיבלנו כי $= gNH/N\,(gN)^{-1}$ $\{\tilde{h}N \mid \tilde{h} \in H\} = H/N$, ולכן $H/N \trianglelefteq G/N$. ■

2. תהי G חבורה, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$.

(א) הוכח $H \cap N$ היא תת־חבורה נורמלית של H.

פתרון: אנחנו כבר הראנו כי חיתוך של תתי־חבורה הוא תת־חבורה. לכן נותר להראות רק נורמליות. יהיו $h \in H, n \in H \cap N$. אנו נביט ב־hnh^{-1}. אנו רוצים להראות כי ביטוי זה הוא איבר ב־$H \cap N$. ובכן, hnh^{-1} בבירור מוכל ב־H, כי הוא מכפלה של איברים ב־H. N נורמלית ב־G ולכן $hnh^{-1} \in N$. ביחד גילינו כי אכן $hnh^{-1} \in H \cap N$. ■

(ב) לכל $a(H \cap N) \in H/H\cap N$ נגדיר $\phi(a(H \cap N)) = aN$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב. כלומר, אם $b(H \cap N) = a(H \cap N)$, אזי $\phi(a(H \cap N)) = \phi(b(H \cap N))$. זאת אומרת שהתמונה של ϕ אינה תלוייה בבחירת נציג מחלקת שקילות ובכך מגדירה פונקציה מ $H/H\cap N$ ל G/N.

פתרון: נבחר שני איברים ב־H מאותו קוסט. נסמנם $a(H \cap N) = b(H \cap N)$ בעבור $a, b \in H$. אזי לפי הגדרתנו לעיל יתקיים $\phi(a(H \cap N)) = aN$ וכן יתקיים $\phi(b(H \cap N)) = bN$. הנתון לגבי a, b הוא שהם מאותו קוסט, או לחילופין שקיים $n \in H \cap N$ כך ש־$b = an$. ואז $\phi(b(H \cap N)) = bN = anN = aN = \phi(a(H \cap N))$. אם כן מצאנו כי ההעתקה איננה תלויה בנציג, ולפיכך מוגדרת היטב. ■

(ג) הראה ש ϕ היא שיכון של $H/H\cap N$ בתוך G/N. (הומומורפיזם חח"ע מ $H/H\cap N$ ל G/N).

פתרון: הומומורפיזם: יהיו $a(H \cap N), b(H \cap N) \in H/H\cap N$ נתונים. אזי

$$\phi(a(H \cap N))\,\phi(b(H \cap N)) = aN \cdot bN = abN = \phi(ab(H \cap N))$$

חח"ע: נראה שהגרעין טריוויאלי. יהי $a(H \cap N) \in \ker\phi$. אנו מחפשים מתי $\phi(a(H \cap N)) = N$. נפעיל את ϕ ונקבל $aN = N$, או בניסוח אחר $a \in N$. לפי הגדרת ϕ איברי התחום שלה הם מהצורה $b(H \cap N)$ בעבור $b \in H$, ובפרט $a \in H$. ביחד מצאנו כי $a \in H \cap N$, ולכן $a(H \cap N) = H \cap N$. אם כן $\ker\phi = \{H \cap N\}$, והגרעין טריוויאלי. בכך הוכחנו כי ϕ חח"ע. בסך הכל מצאנו כי ϕ היא מונומורפיזם, ולכן שיכון, כמבוקש. ■

נצטט את משפטי האיזומורפיזם השני והשלישי.

משפט האיזומורפיזם השני: תהי G חבורה, ויהיו A, B תתי־חבורות של G ונניח ש $B \trianglelefteq G$. אזי AB חבורה, $A \cap B \trianglelefteq B$, $B \trianglelefteq AB$ ומתקיים ${}^{A}/_{A\cap B} \cong {}^{AB}/_{B}$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהי G חבורה, המקיימת $N, K \trianglelefteq G$, וכן $N \trianglelefteq K$. אזי ${}^{K}/_{N} \trianglelefteq {}^{G}/_{N}$ ומתקיים:

$$^{G/N}/_{K/N} \cong {}^{G}/_{K}$$

בסדרת תרגילים הבאה תצטרכו להוכיח את המשפטים האלה. (לא להלחץ; ההוכחות קלות).

3. הנתונים ־ כמו במשפט האיזומורפיזם השני. נגדיר $\phi : A \to {}^{AB}/_{B}$ על ידי $\phi(a) = aB$

(א) הראו ש ϕ הומומורפיזם.

פתרון: יהיו $g, h \in A$. אזי $\phi(g)\phi(h) = gBhB = ghB = \phi(gh)$. המעבר $gBhB = ghB$ נסמך על כך ש־$Bh = hB$. אי לכך, זהו הומומורפיזם של חבורות. ■

(ב) הראו ש ϕ על.

פתרון: יהי $g \in AB$. אזי ניתן להציג אותו על ידי איברים $a \in A, b \in B$ כך ש־$g = ab$. אנו נחפש מקור למחלקה $gB = abB = aB$. ובכן, $\phi(a) = aB = gB$, ולפיכך ϕ על, כמבוקש. ■

(ג) הוכיחו ש $\ker\phi = A \cap B$.

פתרון: נחשב את הגרעין.

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \{a \in A \mid \phi(a) = eB\} = \{a \in A \mid aB = B\}\\ &= \{a \in A \mid a \in B\} = A \cap B\end{aligned}$$

■

(ד) בעזרת משפט איזומורפיזם הראשון הסיקו את משפט האיזומורפיזם השני: ${}^{A}/_{A\cap B} \cong {}^{AB}/_{B}$.

פתרון: נשתמש ב־$\phi : A \to {}^{AB}/_{B}$, אפימורפיזם של חבורות. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, התחום מודולו הגרעין איזומורפי לתמונה. לפיכך ${}^{A}/_{A\cap B} \cong {}^{AB}/_{B}$. ■

4. הנתונים כמו במשפט האיזומורפיזם השלישי, $N, K \trianglelefteq G$, וכן $N \trianglelefteq K$. נגדיר $\phi : {}^{G}/_{N} \to {}^{G}/_{K}$ על ידי $aN \mapsto aK$.

(א) הוכיחו ש ϕ מוגדרת היטב. זאת אומרת אם $g_1N = g_2N$ אזי $\phi(g_1N) = \phi(g_2N)$.

פתרון: נניח $g_1N = g_2N$. אזי $g_1g_2^{-1} \in N \subseteq K$. לפיכך $g_1K = g_2K$. בסך־הכל מצאנו כי $\phi(g_1N) = g_1K = g_2K = \phi(g_2N)$. ■

(ב) הוכיחו ש ϕ הומומורפיזם.

פתרון: יהיו $g_1N, g_2N \in {}^{G}/_{N}$ נתונים. אזי

$$\phi(g_1N)\cdot\phi(g_2N) = g_1Kg_2K = g_1g_2K = \phi(g_1g_2)$$

השויון האמצעי נסמך על כך ש־$Kg_2 = g_2K$. ■

(ג) הוכיחו ש ϕ על.

פתרון: יהי $gK \in {}^{G}/_{K}$ נתון. אזי $\phi(gN) = gK$. ■

(ד) הראו ש $\ker\phi = {}^{K}/_{N}$.

פתרון: נחשב את הגרעין.

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \{gN \in {}^{G}/_{N} \mid \phi(gN) = K\} = \{gN \in {}^{G}/_{N} \mid gK = K\}\\ &= \{gN \in {}^{G}/_{N} \mid g \in K\} = {}^{K}/_{N}\end{aligned}$$

■

(ה) הפעילו את משפט האיזומורפיזם הראשון והסיקו את משפט האיזומורפיזם השלישי:

$$^{G/N}/_{K/N} \cong {}^{G}/_{K}.$$

פתרון: נשתמש באפימורפיזם $\phi: {}^{G}/_{N} \to {}^{G}/_{K}$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, התחום מודולו הגרעין איזומורפי לתמונה. לפיכך ${}^{G/N}/_{K/N} \cong {}^{G}/_{K}$. ■

5. נזכיר, $K_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ היא תת־חבורה נורמלית של S_4. לאיזו חבורה איזומורפית ${}^{S_4}/_{K_4}$?

רמז: השתמש במיון של חבורות מסדר 6.

פתרון: הסדר של ${}^{S_4}/_{K_4}$ הוא האינדקס $[S_4 : K_4] = \frac{24}{4} = 6$. לכן זו אחת החבורות מסדר 6. נביט באיברים $(1\,2\,3)\,K_4$ ו־$(1\,2)\,K_4$ ונבדוק האם הם מתחלפים.

$$\begin{aligned}(1\,2\,3)\,K_4 \cdot (1\,2)\,K_4 &= (1\,3)\,K_4 = \{(1\,3), (2\,4), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2)\}\\ (1\,2)\,K_4 \cdot (1\,2\,3)\,K_4 &= (2\,3)\,K_4 = \{(2\,3), (1\,4), (1\,3\,4\,2), (1\,2\,4\,3)\}\end{aligned}$$

ובכן, מצאנו כאן כי הקוסטים הנ"ל אינם מתחלפים, ולכן אנו מחפשים חבורה מסדר 6 שאיננה אבלית. לאור המיון של החבורות מסדר 6, אנו יודעים כי יש רק טיפוס אחד של חבורות לא אבליות מסדר זה, עד כדי איזומורפיזם, ולכן ${}^{S_4}/_{K_4} \cong S_3$. ■

6. מצא שיכון של חבורה הדיהדרלית D_n בתוך $GL_2(\mathbb{R})$.

רמז: החבורה הדיהדרלית נוצרת על ידי שיקוף וסיבוב. בתרגול, ראיתם איך ניתן לשכן סיבוב בתוך $GL_2(\mathbb{R})$ עכשיו, מצאו איך אפשר לשכן שיקוף ותראו שהחבורה שנוצרת על ידי סיבוב ושיקוף שמצאתם איזומורפית ל D_n.

פתרון: אנו כבר ראינו בשיעור כי מטריצת הסיבוב יכולה להיות ייצוג של חבורת הסיבובים, בעזרת ההעתקה $D_n \to GL_2(\mathbb{R})$ הנתונה על ידי $r \mapsto \begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n}\\ -\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}$. הרעיון העומד בבסיס ההצגה הזו הוא שווקטור $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ מסובב בזווית $\frac{2\pi}{n}$ על ידי הכפלתו במטריצה זו. אם כן, אם נניח את מרכז המצולע המשוכלל שלנו בראשית הצירים, הרי שסיבובו של המצולע יסובב את כל קודקדיו בהתאם, והפעולה המתאימה לכך היא הכפל במטריצה הנ"ל. החבורה הדיהדרלית D_n נוצרת על ידי שני יוצרים. הראנו כאן לאן הולך יוצר אחד, הסיבוב. אנו צריכים למצוא כאן לאן הולך היוצר השני, השיקוף. נניח שאנו מתעסקים ביקוף על ציר ה־y.[1] חישוב יראה שוקטור v משוקף על ציר זה מיוצג על ידי $\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$. המטריצה שתעביר בין וקטורים אלו היא $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. ולכן השיכון שלנו צריך לקחת את השיקוף s למטריצה זו.

לסיכום, השיכון שאנו מציעים הוא

$$r^i s^j \mapsto \begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n}\\ -\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}^i \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^j$$

הסברנו כאן באופן תיאורטי מדוע השיכון מוגדר היטב, כיצד אנו יודעים כי הוא מקיים את היחסים של החבורה הדיהדרלית וכן מדוע הוא חח"ע. ניתן גם להראות ישירות כל טענה כזו על ידי חישוב מפורש. ■

7. תהיינה G, H חבורות, $\varphi: G \to H$ איזומורפיזם, $N \trianglelefteq G$ תת־חבורה של G. הוכיחו: ${}^{G}/_{N} \cong {}^{H}/_{\varphi(N)}$.

פתרון: ראשית עלינו להראות כי $\varphi(N) \trianglelefteq H$. זהו יישום מדויק של מה שהוכחנו בתרגילי הבית, תרגיל 6 שאלה 4. כעת, השאלה מוגדרת היטב, ולנו נותר רק למצוא איזומורפיזם בין החבורות. נגדיר $\tilde{\varphi}: {}^{G}/_{N} \to {}^{H}/_{\varphi(N)}$ על ידי $\tilde{\varphi}(gN) = \varphi(g) \cdot \varphi(N)$. להלן נסמן, מטעמי בהירות וקיצור, $\widetilde{N} = \varphi(N)$. נזכיר כאן תכונה חשובה של קוסטים, ממערך תרגול 3 סעיפים 2.1־2.2: $gN = hN$ א.ס.ם. $gh^{-1} \in N$. מטרתנו כאן היא להראות כי $\tilde{\varphi}$ הוא איזומורפיזם של חבורות.

- מוגדר היטב: נניח כי $gN = hN$. לשון אחר, $gh^{-1} \in N$. לכן $\varphi(gh^{-1}) \in \varphi(N) = \widetilde{N}$. מכיוון ש־$\varphi$ הוא הומומורפיזם, $\varphi(g)(\varphi(h))^{-1} \in \widetilde{N}$ ולכן $\varphi(g)\,\widetilde{N} = \varphi(h)\,\widetilde{N}$. אם כן, מצאנו כאן כי $\tilde{\varphi}(g) = \tilde{\varphi}(h)$, ולפיכך ההתאמה הזו היא פונקציה מוגדרת היטב.
- שומר מבנה (הומומורפיזם): יהיו $gN, hN \in {}^{G}/_{N}$ נתונים. אזי

$$\tilde{\varphi}(gN)\,\tilde{\varphi}(hN) = \varphi(g)\,\widetilde{N} \cdot \varphi(h)\,\widetilde{N} = \varphi(g)\,\varphi(h)\,\widetilde{N} \cdot \widetilde{N} = \varphi(gh)\,\widetilde{N} = \tilde{\varphi}(ghN) = \tilde{\varphi}(gN \cdot hN)$$

המעבר השני הוא מפני ש־$\widetilde{N} \trianglelefteq H$, ולכן הוא מתחלף עם כל איבר. שאר המעברים הם מהגדרת $\tilde{\varphi}$ ומכך ש־φ הוא הומומורפיזם.

- חח"ע: נניח $\varphi(g)\,\widetilde{N} = \varphi(h)\,\widetilde{N}$. אזי $\varphi(g)(\varphi(h))^{-1} \in \widetilde{N}$. מכיוון ש־$\varphi$ הוא הומומורפזים, $\varphi(gh^{-1}) \in \widetilde{N} = \varphi(N)$. מכיוון ש־$\varphi$ על, $gh^{-1} \in N$. לכן $gN = hN$. כך מצאנו חד־חד ערכיות.

[1] כמובן, יש אפשרות לשקף סביב כל ציר אחר העובר דרך הראשית, ואז יתקבל שיכון שונה.

- על: יהי $h\widetilde{N} \in {}^{H}\!/_{\varphi(N)}$. מפני ש־$\varphi$ על, קיים $g \in G$ המקיים $\varphi(g) = h$. ואז יתקיים $\tilde{\varphi}(gN) = h\widetilde{N}$.

אם כן מצאנו כי ההתאמה $\tilde{\varphi}$ היא איזומורפיזם, ולכן החבורות איזומורפיות. ■

8. תהי G חבורה, $H \trianglelefteq G$ מאינדקס p ראשוני. הוכיחו כי לכל $K \leq G$ מתקיים אחד מן השניים:
   - $K \leq H$.
   - $G = HK$ וכן $[K : K \cap H] = p$.

רמז: משפט האיזומורפיזם השני.

פתרון: יהיו G, H, K כנתון. H נורמלית ב־G, ולכן HK היא חבורה, בפרט היא תת־חבורה של G. לפי משפט לגרנז'

$$p = [G : H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{|G|}{|HK|} \cdot \frac{|HK|}{|H|} = [G : HK] \cdot [HK : H]$$

מכיוון ש־p ראשוני, אנו יודעים כי $[HK : H] \in \{1, p\}$. לפי משפט האיזומורפיזם השני, מתקיים ${}^{K}\!/_{K\cap H} \cong {}^{HK}\!/_{H}$. לפיכך גם $[K : K \cap H] \in \{1, p\}$. נבדוק כל אפשרות כזו בנפרד. האפשרות הראשונה היא שהאינדקס הוא 1, ואז $K = K \cap H$. לשון אחר, $K \subseteq H$. מכיוון שאלו חבורות התוצאה היא $K \leq H$. האפשרות השניה היא שהאינדקס הוא p. אם זה קורה אז $[HK : H] = p$ ו־$[G : HK] = 1$. לכן $G = HK$ ו־$[K : K \cap H] = p$. בסך הכל אנו רואים כי אלו האפשרויות היחידות. ■

9. תהיינה M, N תתי־חבורות נורמליות של G כך ש $MN = G$. הוכח ש $G/(M \cap N) \cong G/M \times G/N$.

רמז: מצא העתקה מ G ל $G/M \times G/N$ וחשב את הגרעין שלה. לאחר מכן, הפעל את משפט האיזומורפיזם הראשון.

פתרון: נגדיר העתקת הטלה $\pi : G \to G/M \times G/N$ על ידי $\pi(g) = (gM, gN)$. ברור כי זו העתקה מוגדרת היטב. אנו נרצה לראות כי זהו אפימורפיזם, וכך נוכל להשתמש במשפט האיזומורפיזם הראשון. ראשית נראה כי זהו הומומורפיזם. יהיו $g, h \in G$. אזי

$$\pi(g)\pi(h) = (gM, gN) \cdot (hM, hN) = (gM \cdot hM, gN \cdot hN) = (ghM, ghN) = \pi(gh)$$

אם כן, זהו הומומורפיזם. כעת נראה כי הוא על. יהיו $a, b \in G$ כך ש־(aM, bN) איבר בטווח, $G/M \times G/N$. ניתן להציג איבר זה גם על ידי (amM, bnN) עבור כל $m \in M, n \in N$. אנו מחפשים m, n כאלה כך ש־$am = bn$, ואז המקור שלנו יהיה am. אם כן, אנו מחפשים פתרון למשוואה $a^{-1}b = mn^{-1}$. מכיוון ש־$MN = G$, קיימים m, n^{-1} (לא בהכרח יחידים) כך ש־$a^{-1}b = mn^{-1}$. אם כן $\pi(am) = (amM, amN) = (amM, bnN) = (aM, bN)$. כך הראנו שהפונקציה הזו על. מצאנו כאן כי π הוא אפימורפיזם של חבורות, ולכן ניתן להשתמש במשפט האיזומורפיזם הראשון. לצורך השימוש במשפט, עלינו לחשב את גרעין ההעתקה.

$$\begin{aligned} \ker\pi &= \{g \in G \mid \pi(g) = (M, N)\} = \{g \in G \mid gM = M, gN = N\} \\ &= \{g \in G \mid g \in M, g \in N\} = M \cap N \end{aligned}$$

כעת נישם את משפט האיזומורפיזם הראשון על ההעתקה π שהגדרנו כאן, ונקבל $G/(M \cap N) \cong G/M \times G/N$. ■

10. תהי G חבורה. נגדיר אקספוננט של חבורה, $\exp(G)$ להיות המספר המינימלי n כך שלכל $g \in G$, $g^n = 1_G$. אם לא קיים כזה, אומרים כי $\exp(G) = \infty$.

(א) חשב את $\exp(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10})$.

פתרון: שימו לב: בפתרון סעיף זה נשתמש בכתיב חיבורי. ראשית, נעיר כי בחבורה ציקלית, האקספוננט הוא הסדר. אנו נראה כי $\exp(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}) = \operatorname{lcm}(\exp(\mathbb{Z}_6), \exp(\mathbb{Z}_{10})) = \operatorname{lcm}(6, 10) = 30$. יהי $(m, n) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ נתון. אזי $30 \cdot (m, n) = (30m, 30n) = (0, 0)$. לפיכך האקספוננט מחלק את 30. מנגד, האקספוננט מתחלק בסדרם של כל איברי החבורה. בין איברי החבורה ניתן למצוא גם איברים מסדר 6 או 10, ולכן האקספוננט מתחלק ב־$\operatorname{lcm}(6, 10) = 30$. לסיכום, מצאנו כי 30 מחלק את האקספוננט וגם מתחלק בו, ולכן האקספוננט הוא $\exp(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}) = 30$. ■

(ב) נניח ש G ו H איזומורפיות. הוכח כי יש להן אותו אקספוננט.

פתרון: נסמן את האיזומורפיזם המתאים על ידי $\varphi : H \to G$. נניח $\exp(G) = n$. אזי לכל איבר ב־G מתקיים $g^n = 1$, אבל לכל $0 < m < n$ קיים g כך ש־$g^m \neq 1$. נביט כעת ב־H. יהי $h \in H$. אזי $\varphi(h^n) = (\varphi(h))^n = 1$ ומפני ש־φ איזומורפיזם, גם $h^n = 1$. כעת נראה מינימליות של n זה. יהי $0 < m < n$ נתון. אזי קיים $g \in G$ כך ש־$g^m \neq 1$. אזי $\varphi^{-1}(g) \in H$ מקיים

$$\left(\varphi^{-1}(g)\right)^m = \varphi^{-1}(g^m) \neq \varphi^{-1}(1) = 1$$

המעבר האמצעי (אי־השוויון) מתבסס על כך ש־φ פונקציה, קרי: יחס חד־ערכי. לסיכום, הראנו כי n מקיים הנדרש, ולכן $\exp(H) = n$. ■

11. תהי G חבורה. נסמן ב $\mathrm{Aut}\left(G\right)$ את קבוצת כל האוטומורפיזמים של G (אוטומורפיזם = איזומורפיזם מ־G אל עצמה).

(א) הוכח ש $\mathrm{Aut}\left(G\right)$, עם פעולת ההרכבה, היא חבורה.

פתרון: נזכיר כי הראנו בעבר שקבוצת כל ההעתקות ההפיכות מקבוצה לעצמה היא חבורה עם פעולת ההרכבה. לחבורה זו קראנו חבורת הסימטריה. כעת אנו עוסקים בתת־קבוצה של $S\left(G\right)$, התמורות שהן גם שומרות מבנה. לכן ניתן להשתמש כאן בקריטריון לתת־חבורות. יהיו $f,g\in\mathrm{Aut}\left(G\right)$. אזי ההרכבה $f\circ g$ היא פונקציה חח"ע ועל. נראה כי היא שומרת־מבנה. יהיו $x,y\in G$. אזי $f\circ g\left(xy\right)=f\left(g\left(xy\right)\right)=f\left(g\left(x\right)\cdot g\left(y\right)\right)=f\left(g\left(x\right)\right)\cdot f\left(g\left(y\right)\right)=$ $f\circ g\left(x\right)\cdot f\circ g\left(y\right)$. אם כן, ההרכבה הזו היא גם שומרת מבנה. בסך הכל מצאנו כי $f\circ g$ גם היא אוטומורפיזם. אם כן, $\mathrm{Aut}\left(G\right)$ סגורה להרכבה. נותר להראות כי היא גם סגורה להופכי. תהי $f\in\mathrm{Aut}\left(G\right)$. זאי ברור כי f^{-1} היא גם תמורה שומרת־מבנה, ולכן היא אוטומורפיזם. לסיכום מצאנו כי $\mathrm{Aut}\left(G\right)$ היא תת־קבוצה סגורה להרכבה ולהופכי, ולכן היא תת־חבורה של $S\left(G\right)$, ובפרט היא חבורה. ■

(ב) מצא את $\mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}\right)$.

פתרון: ניתן להגדיר הומומורפיזם על ידי פעולתו על היוצרים, ובתנאי שכל היחסים שהיוצרים מקיימים מתקיימים גם בין תמונותיהם. לכן די לקבוע לאן הולך היוצר 1. מכיוון שאנו מחפשים איזומורפיזם, כל יוצר חייב ללכת ליוצר. בפרט במקרה שלנו היוצר 1 חייב ללכת לאחד היוצרים של $\mathbb{Z}$, הלא הם ±1. לפיכך יש שני אוטומורפיזמים כאלה:

$$\mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}\right)=\begin{Bmatrix}1 & \mapsto & 1\\ 1 & \mapsto & -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}n & \mapsto & n\\ n & \mapsto & -n\end{Bmatrix}$$

■

(ג) הוכח: $\mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}_n\right)\cong U_n$.

פתרון: באופן דומה לסעיף הקודם, נשלח את היוצר 1 של $\mathbb{Z}_n$ לאחד היוצרים של $\mathbb{Z}_n$. היוצרים של $\mathbb{Z}_n$ הם איברי U_n והרכבת אוטומורפיזמים כאלה מתנהגת באופן דומה לכפל ב־U_n. לפיכך החבורות איזומורפיות. ניתן לנסח בפירוש איזומורפיזם זה על ידי $\phi\left(f\right)=f\left(1\right)$. ■

תזכורת: לכל $g\in G$, הגדרנו את את ההצמדה על ידי g כך: $\bullet^g:G\to G$ על ידי $x^g=gxg^{-1}$. הוכחתם שהצמדה היא אוטומורפיזם.

(ד) הוכח שאוסף ההצמדות על ידי איבר ב g היא תת־חבורה נורמלית של $\mathrm{Aut}\left(G\right)$. חבורה זו נקראת חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים של G. נסמן אותה ב $\mathrm{Inn}\left(G\right)$.

פתרון: לשם הפשטות, לעיתים אנו נסמן את ההצמדה על־ידי g בסימן f_g. כבר הוכחנו, כאמור, בתרגיל קודם, כי $\mathrm{Inn}\left(G\right)\subseteq\mathrm{Aut}\left(G\right)$. נפתח ונוכיח כי $\mathrm{Inn}\left(G\right)\leq\mathrm{Aut}\left(G\right)$, בעזרת קריטריון לתת־חבורות. ראשית נראה כי ההצמדות סגורות להרכבה, ואז נראה כי הן סגורות להפיך. יהיו $g,h\in G$. אזי $f_h\circ f_g\left(x\right)=\left(x^g\right)^h=$ $\left(gxg^{-1}\right)^h=hgxg^{-1}h^{-1}=\left(hg\right)x\left(hg\right)^{-1}=x^{hg}=f_{hg}\left(x\right)$. שימו לב לסדר הרישום הנכון! כעת נראה כי ההצמדות סגורות להפיך. תהי $\bullet^g$ הצמדה. היא מקיימת $y=x^g=gxg^{-1}$. ניתן לראות כי באופן דומה מתקיים $x=g^{-1}yg=y^{\left(g^{-1}\right)}$. אי לכך, ההפיך של $\bullet^g$ הוא $\bullet^{g^{-1}}$. עד כאן הראנו כי $\mathrm{Inn}\left(G\right)$ סגורה להרכבה ולהפיך, ולכן היא תת־חבורה. כעת נותר להראות נורמליות. יהיו $f_g\in\mathrm{Inn}\left(G\right),\varphi\in\mathrm{Aut}\left(G\right)$. אזי

$$\varphi\circ f_g\circ\varphi^{-1}\left(x\right)=\varphi\left(g\cdot\varphi^{-1}\left(x\right)\cdot g^{-1}\right)=\varphi\left(g\right)\cdot\varphi\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\cdot\left(\varphi\left(g\right)\right)^{-1}=\varphi\left(g\right)\cdot x\cdot\left(\varphi\left(g\right)\right)^{-1}=f_{\varphi\left(g\right)}\left(x\right)$$

לפיכך מתקיים $\varphi f_g\varphi^{-1}=f_{\varphi\left(g\right)}\in\mathrm{Inn}\left(G\right)$. לסיכום, הראנו כי $\mathrm{Inn}\left(G\right)\trianglelefteq\mathrm{Aut}\left(G\right)$. ■

תזכורת: המרכז של חבורה G הוא $Z\left(G\right)=\left\{g\in G:\forall x\in G,xg=gx\right\}$.

(ה) הוכח ש $G/Z(G)\cong\mathrm{Inn}\left(G\right)$. (רמז: משפט האיזומורפיזם הראשון).

פתרון: נגדיר פונקציה $f:G\to\mathrm{Inn}\left(G\right)$ על ידי $f\left(g\right)=\bullet^g$. ברור כי פונקציה זו מוגדרת היטב. בסעיף הקודם הראנו כי $f\left(gh\right)=\bullet^{gh}=\left(\bullet^h\right)^g$ ולכן זהו הומומורפיזם. קל לראות כי הפונקציה על, כי לכל $\bullet^g\in\mathrm{Inn}\left(G\right)$ מתקיים $f\left(g\right)=\bullet^g$. לפיכך ניתן להשתמש במשפט האיזומורפיזם הראשון. כעת נותר לחשב את הגרעין.

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{g\in G\mid f\left(g\right)=id\right\}=\left\{g\in G\mid\bullet^g=id\right\}=\left\{g\in G\mid\forall x\in G,x^g=x\right\}\\ &= \left\{g\in G\mid\forall x\in G,gxg^{-1}=x\right\}=\left\{g\in G\mid\forall x\in G,gx=xg\right\}=Z\left(G\right)\end{aligned}$$

אם כן, מצאנו כי הגרעין של ההעתקה הוא המרכז של החבורה. נייישם את משפט האיזומורפיזם הראשון על f ונקבל $G/Z(G)\cong\mathrm{Inn}\left(G\right)$. ■