תרגיל בית 4 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

1. תארו את כל המחלקות השמאליות ב-$\mathbb{Z}_{30}/\left\langle 3\right\rangle$.
2. מצאו איבר מסדר 6 בחבורה S_5. רמז: מצאו איבר מסדר 2 ב-S_2 ואיבר מסדר 3 ב-S_3.

שאלות רגילות

1. רמז: הסעיפים הבאים דורשים קצת קומבינטוריקה.
   (א) מצאו כמה איברים מסדר 6 יש בחבורה S_6.
   (ב) מצאו כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה S_6.
2. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2, את σ^{20} ואת $o(\sigma)$.
   (א) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 5 & 2 & 9 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8\end{pmatrix}\in S_9$.
   (ב) $(1\ 2)\,(2\ 5\ 4)\,(3\ 1\ 4)\,(1\ 5)\in S_5$
3. תהי $\sigma\in S_n$ תמורה, ויהי מחזור $a=(a_1,a_2,\ldots,a_k)\in S_n$. הוכיחו כי

$$\sigma a\sigma^{-1}=\sigma\left(a_1,a_2,\ldots,a_k\right)\sigma^{-1}=\left(\sigma\left(a_1\right),\sigma\left(a_2\right),\ldots,\sigma\left(a_k\right)\right)$$

למשל, עבור $\sigma=(1\ 2)\,(4\ 5)$ ו-$a=(2\ 3\ 5\ 6)$ נקבל

$$\sigma\,(2\ 3\ 5\ 6)\,\sigma^{-1}=(1\ 3\ 4\ 6)$$

כאתגר, האם אתם יכולים למצוא נוסחה עבור $\sigma a\sigma^{-1}$ כאשר a היא תמורה כלשהי?

4. נתבונן ב־S_n עבור $n > 2$.

(א) הוכיחו שלכל מחזור $\mathrm{id} \neq \tau \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש־$\sigma\tau \neq \tau\sigma$. רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

(ב) הוכיחו כי $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$.

5. תזכורת:הוכחתם בהרצאה כי ישנה התאמה חח"ע ועל בין מחלקות שמאליות של $H \leq G$, ובין מחלקות ימניות לפי $gH \mapsto Hg^{-1}$. הוכיחו כי ההתאמה $gH \mapsto Hg$ אינה פונקציה.

רמז: השתמשו בדוגמת החישוב של מחלקות שמאליות וימניות של S_3 שהראנו בתרגול, והראו שהפונקציה לא מוגדרת היטב.

6. מצאו את האינדקסים הבאים:

(א) $[U_{14} : \langle 11 \rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

(ב) $[\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 : \langle (2,2) \rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

(ג) $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (2,2) \rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

7. תהי G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ תת־חבורות סופיות שלה

(א) הוכיחו שאם $(|H|, |K|) = 1$, אז $H \cap K = \{e\}$.

(ב) יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \neq K$, אז $H \cap K = \{e\}$.

שאלות אתגר

אם פתרתם את שאלות האתגר, ואין לשאלה פתרון, בבקשה שלחו לי את הפתרון שלהן.

1. תהי I קבוצה מכוונת (כלומר I היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ כך ש־$k > i, j$).
מערכת של חבורות $\{G_i\}_{i \in I}$ נקראת רשת עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $G_i \subseteq G_j$.
הוכיחו שבמקרה זה $\bigcup_{i \in I} G_i$ היא חבורה. בפרט, אם ישנה שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.

בהצלחה!