תרגיל בית 7 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם ${}^{G}/_{H}$ ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם ${}^{G}/_{H}$ סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

שאלות רגילות

שאלה 2. הפריכו או הביאו דוגמה לטענות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f: \mathbb{Z}_{56} \to \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_8$.

ב. קיים מונומורפיזם $f: \mathbb{Z}_{40} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

ג. קיים איזומורפיזם $f: S_4 \to D_{12}$.

ד. קיים מונומורפיזם $f: A_5 \to \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_5 \times U_{14}$.

ה. קיים מונומורפיזם $f: A_4 \to D_{12} \times S_5$.

ו. קיים אפימורפיזם $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. רמז: הבינו למה מנה של חבורה ציקלית היא ציקלית.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}/_{K} \times {}^{G}/_{H}$.

שאלה 4. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1, לתת־חבורה שלה $H_1 \lhd G_1$, לחבורה לא אבלית G_2 ולתת־חבורה שלה $H_2 \lhd G_2$, כך ש-$H_1 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}/_{H_1} \cong {}^{G_2}/_{H_2}$. רמז: אפשר לבחור את G_1, G_2 להיות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^3.

שאלה 5. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. יהיו $x_1, x_2 \in G$. הראו שתת־החבורה $H = \langle x_1, x_2 \rangle$ היא ציקלית וסופית. רמז: הציגו את x_1, x_2 כמחלקות שמאליות, ואז נסו להבין כיצד נראה איבר כלשהו ב-H.

ג. מצאו קבוצת איברים $S \subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S \rangle$ היא אינסופית וגם $K \neq G$. רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

שאלה 6.

א. מצאו כמה הומומורפיזמים $f \colon \mathbb{Z}_2 \to S_6$ קיימים. רמז: שאלה 1 בתרגיל בית 4.

ב. מצאו כמה הומומורפיזמים $f \colon \mathbb{Z}_{25} \to A_8$ קיימים, ומהו $\ker f$ של כל אחד מהם.

שאלה 7. תהינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong {}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}$.

שאלה 8. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$. נגדיר את הליבה של H ב-G להיות

$$\mathrm{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

א. הוכיחו כי $\mathrm{Core}(H) \leq G$. רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת $gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$.

ב. הוכיחו ש-$\mathrm{Core}(H)$ היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H.

ג. תנו דוגמה לחבורה G, ולשתי תת־חבורות לא טריוויאליות H, K (הן לא G ולא $\{e\}$) כך ש-$\mathrm{Core}(H) = \{e\}$ וגם $\mathrm{Core}(K) = K$.

שאלות אתגר

שאלה 9. תהי G חבורה. נקרא לתת־חבורה של G נאותה אם היא מוכלת ממש ב-G.

א. הוכיחו ש-G אינה איחוד של שתי תת־חבורות נאותות. כלומר שאם $G = H \cup K$, אז $G = H$ או $G = K$.

ב. תנו דוגמה לחבורה מסדר 4 שהיא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות שלה.

ג. מעתה נניח כי G היא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות, $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. הוכיחו כי חיתוך של כל שתיים מתת־החבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ד. הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ה. הסיקו כי $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \lhd G$.

ו. הוכיחו שהאינדקס של החיתוך ב-G הוא 4. הראו שחבורת המנה ביחס לחיתוך איזומורפית לדוגמה שנתתם בסעיף השני.

בהצלחה!