פתרון תרגיל 9

1) תהי f פונקציה זוגית ונניח ש $\lim_{x\to 0^+} f(x)=L\in\mathbb{R}$. הוכיחו ש $\lim_{x\to 0} f(x)=L$.

<u>פתרון</u>

מספיק להוכיח ש $\lim_{x\to 0^-} f(x)=L$ כי אז נקבל מהנתון $\lim_{x\to 0^-} f(x)=L=\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ולכן $\lim_{x\to 0} f(x)=L$. נשתמש בהגדרת היינה. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\forall n \quad x_n<0$ וכן $\lim_{n\to\infty} x_n=0$. נראה ש $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$ ונקבל הדרוש.

כעת, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=L$ ולכן מהגדרת הגבול החד צדדי לפי היינה ומכך שמתקיים $\forall n \quad -x_n>0$ וכן $\lim_{n\to\infty}\left(-x_n\right)=-\lim_{n\to\infty} x_n=0$ נקבל ש $\lim_{n\to\infty} f\left(-x_n\right)=L$.

אבל, הפונקציה זוגית ולכן $f(x_n)=f(-x_n) \quad \forall n$. מכאן,

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(-x_n\right)=L$ כדרוש.

2) תהי f פונקציה המקיימת $\lim_{x\to 0^+} f(x)=L$.

א) הוכיחו/הפריכו: לכל $a>0$ מתקיים $\lim_{x\to 0^+} f(ax)=L$.

ב) הוכיחו/הפריכו: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{x\to 0^+} f(ax)=L$.

<u>פתרון</u>

א) הוכחה- יהי $a>0$. נשתמש בהגדרת היינה. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $x_n>0 \quad \forall n$ וכן $\lim_{n\to\infty} x_n=0$. צ"ל ש $\lim_{n\to\infty} f(ax_n)=L$. $\forall n \quad x_n>0$ וכן $a>0$ ולכן $y_n=ax_n>0 \quad \forall n$. כמו כן $\lim_{n\to\infty} y_n=a\lim_{n\to\infty} x_n=0$. מהגדרת הגבול $\lim_{x\to 0^+} f(x)=L$ עפ"י היינה נקבל ש $\lim_{n\to\infty} f(ax_n)=\lim_{n\to\infty} f(y_n)=L$.

ב) הפרכה. תהי $f(x)=\begin{cases}5 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ אזי $\lim_{x\to 0^+} f(x)=5$. עבור $a=-1$ נקבל

$$\lim_{x\to 0^+} f(ax)=\lim_{x\to 0^+} f\left(-x\right)=0\neq 5$$